НЕРАВЕНСТВА ЛУННЫХЪ МѢСЯЦЕВЪ

ИЗСЛѢДОВАНІЕ

Кн. Н. Долгорукова.

(Приложеніе къ Извѣстіямъ Русскаго Астроном. Общества за 1912 г.).

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.
Типографія Ю. Н. Эрлихъ (влад. А. Э. Коллинсъ) М. Дворянская, 10.
1912.

Посвящается

славному Геодэту

и Астроному

Василію Васильевичу

Витковскому.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

Предисловіе.

Ни въ учебникахъ, ни въ спеціальныхъ трактатахъ по теоріи Луны почти ничего нельзя найти по вопросу о неравенствахъ лунныхъ*) мѣсяцевъ, а между тѣмъ этотъ вопросъ, чрезвычайно интересный и самъ по себѣ и по связи его съ общею теоріею Луны, неизбѣжно возникаетъ при первомъ болѣе или менѣе обстоятельномъ разсмотрѣніи астрономическихъ календарей.

Мы ведемъ счетъ по мѣсяцамъ и хорошо знаемъ среднюю продолжительность звѣзднаго и другихъ мѣсяцевъ, а ихъ измѣненія, иногда крупныя—изслѣдованы очень мало.

Всѣ существующія теоріи луннаго движенія явно или implicite построены на принципѣ измѣняемости такъ называемыхъ, произвольныхъ постоянныхъ, т.-е. элементовъ орбиты, въ числѣ которыхъ фигурируетъ и среднее движеніе.

Величина n извѣстнымъ образомъ связана съ большою полуосью лунной орбиты, и потому только одинъ изъ этихъ двухъ элементовъ можно считать независимымъ.

Время обращенія T связано съ n извѣстною формулой $T = \frac{2\pi}{n}$, изъ которой слѣдуетъ, что вмѣсто n можно считать элементомъ средній періодъ обращенія.

Достаточно раскрыть Nautical Almanac и обратить вниманіе на неравномѣрность промежутковъ времени, отдѣляющихъ моменты послѣдовательныхъ новолуній, прохожденій черезъ перигей и пр., чтобы убѣдиться въ томъ, что можно-бы было назвать неправильностью луннаго движенія, и составить себѣ понятіе о значительности колебаній величинъ n и ω, т.-е средняго движенія и долготы перигея.

Все дѣло въ томъ, что сравнительно второстепенныя явленія въ общей картинѣ луннаго движенія нарушаютъ «эллиптичность» лунной орбиты—если можно такъ выразиться—въ такой мѣрѣ, что и въ пер-

---

*) Въ широкомъ смыслѣ этого слова, т.-е. не только собственно лунныхъ, или синодическихъ, но и звѣздныхъ, аномалистическихъ и пр.

вомъ приближеніи почти нельзя представить себѣ Луну, какъ движущуюся подъ вліяніемъ одного центральнаго притяженія.

Уклоненія отъ нормы играютъ здѣсь почти туже роль, какъ и явленія эллиптическаго характера. Напримѣръ перигей перемѣщается въ теченіе года по долготѣ въ среднемъ на $40^{\circ}40',6$ постояннымъ поступательнымъ движеніемъ, а періодическое движеніе линіи апсидъ въ теченіе одного мѣсяца часто превышаетъ половину этого числа.

Эксцентрицитетъ лунной орбиты измѣняется въ ту и другую сторону на $\frac{1}{5}$ своей средней величины. Если вычислять лунныя таблицы — какъ это сдѣлалъ Гансенъ — со средними величинами e и i, то приходится вводить значительныя поправки въ остальные элементы, отчего измѣненія ихъ становятся еще значительнѣе.

Въ частности перемѣщенія луннаго перигея представляютъ собою картину движенія точки какъ-бы независимой отъ самой Луны и подчиняющейся притяженію Солнца, какъ самостоятельное матеріальное тѣло.

При изслѣдованіи частныхъ явленій луннаго движенія приходится сталкиваться съ такой дилеммой: или брать данный вопросъ во всей его полнотѣ, т.-е. принимать въ соображеніе всѣ неравенства, что̀ почти невозможно, или подвергнуться риску такихъ упущеній, которыя могутъ отразиться на правильности окончательныхъ заключеній.

При опредѣленіи варіацій звѣзднаго и синодическаго мѣсяцевъ возможно ограничиваться главными членами долготы, и точность вычисленія мало страдаетъ отъ этой неполноты или отъ небольшихъ ошибокъ въ коэффиціентахъ крупныхъ членовъ. Другое дѣло — аномалистическіе мѣсяцы. Вычисленіе продолжительности мѣсяцевъ, считаемыхъ отъ одного перигея до другого, требуетъ точнѣйшаго опредѣленія коэффиціентовъ эвекціи и варіаціи, притомъ съ обособленіемъ тѣхъ частей коэффиціентовъ, которые зависятъ непосредственно отъ тангенціальной силы.

Въ выраженіи $\int \frac{d\omega}{dt}\, dt$, т.-е. въ варіаціи долготы перигея находятся члены вида $\frac{A}{e} \sin (2\xi - \varphi)$ и $\frac{B}{e} \sin (2\xi + \varphi)$, съ малымъ дѣлителемъ e; неточность A и B уже въ $10''$ обусловливаетъ ошибку въ соотвѣтствующемъ коэффиціентѣ разложенія $\Delta\omega$ почти на $20.10''$ или на $3'20''$, а между тѣмъ точное опредѣленіе коэффиціентовъ A и B, представляющихъ собою ряды съ малою сходимостью, возможно только на базисѣ общей и полной теоріи Луны.

Сложности вычисленія варіацій $\Delta\omega$ соотвѣтствуетъ и затруднительность точнаго опредѣленія момента прохожденія Луны черезъ перигей или черезъ апогей изъ непосредственныхъ телескопическихъ наблюденій.

Въ перигеѣ видимый діаметръ Луны въ теченіе нѣсколькихъ часовъ остается почти безъ перемѣны, и уловить моментъ его maximum'а задача не изъ легкихъ. Въ Nautical Almanac'ѣ, напримѣръ, время прохожденія черезъ перигей указывается только въ доляхъ часа.

Дать исчерпывающее рѣшеніе каждаго даннаго вопроса въ теоріи Луны въ такой-же мѣрѣ трудно, какъ доказать напримѣръ сходимость извѣстнаго ряда, законъ составленія котораго неизвѣстенъ.

А все-таки необходимо какъ нибудь разрѣшать частные вопросы въ такой формѣ, чтобы неспеціалисты могли въ нихъ оріентироваться безъ тяжелаго багажа неподдающейся популяризаціи безконечной теоріи, а люди болѣе или менѣе ознакомленные съ наукой о Лунѣ, пріобрѣтали-бы что нибудь новое въ своихъ концепціяхъ...

Я беру въ основаніе болѣе или менѣе точныя величины коэффиціентовъ главныхъ лунныхъ неравенствъ, насколько они извѣстны по теоріи Понтекулана, Делоне и др., ограничиваясь главными членами второстепенныхъ неравенствъ и опуская всѣ мелкіе.

«Per aspera ad Selenam!»

Не претендуя, конечно, на полноту своего изслѣдованія, я желалъ только выяснить основу явленія и достигнуть такой стадіи вопроса, съ высоты которой хорошо виденъ дальнѣйшій путь и всѣ его характерныя особенности.

Изучить теорію Луны все равно невозможно; для выполненія этой задачи не хватило-бы жизни человѣческой и силъ самаго обширнаго ума; но изучать ее и изучать еще съ надеждой не только на усовершенствованіе ея, но даже на «исторженіе» у ревнивой къ своимъ секретамъ и чудесамъ природы многихъ и многихъ тайнъ ея,—это доступно многимъ математически образованнымъ людямъ и это необходимо для пользы науки, потому что — я въ этомъ глубоко убѣжденъ — именно въ теоріи Луны лежитъ ключъ къ разрѣшенію самыхъ важныхъ вопросовъ небесной механики.

Достаточно сказать, что теперь на очереди стоитъ изслѣдованіе законовъ движенія тройныхъ и четверныхъ звѣздъ. Allez en avant, какъ говорилъ Даламберъ,—la foi vous viendra! Да, къ дерзающему итти впередъ придетъ и вѣра въ успѣхъ своихъ усилій, въ полезность и общечеловѣческій смыслъ своихъ исканій!

Я позволю себѣ обратить вниманіе своихъ читателей на замѣченное мною любопытное соотношеніе между видимой угловой скоростью движенія Солнца и луннаго перигея.

Это соотношеніе относится къ той же области явленій, какъ напримѣръ, равенство періодовъ обращенія Луны вокругъ своей оси и вокругъ Земли, какъ открытый Доминикомъ Кассини законъ постояннаго совпаденія линіи пересѣченія луннаго экватора и эклиптики съ движущейся линіей узловъ лунной орбиты, и пр.

Изслѣдованіямъ въ области теоріи Луны всегда сопутствовали важныя открытія въ математикѣ. Селена была постоянно истинной возбудительницей человѣческаго генія, и ея роль въ этомъ отношеніи навѣрное еще не окончена. Прочтите великолѣпное сочиненіе Пуанкаре «Les Methodes nouvelles de la Mécanique Céleste», его работы по изслѣдованію безконечнаго детерминанта Хилля, оцѣните многообѣщающіе труды Линдштедта и Болина...

Развѣ ихъ теоремы не успѣхъ математики?

И развѣ не задачи небесной механики были поводомъ къ изысканіямъ этихъ ученыхъ?

Болѣе совершенныя лунныя таблицы, которыя должны замѣнить Ганзеновскія, вѣроятно будутъ вычислены по теоріи Хилля, давшаго столь много цѣннаго въ обширной области небесной механики, посвященной все еще облеченному тайной меланхолическому спутнику Земли.

По поводу теоріи Хилля любопытно отмѣтить аналогію между гармоническими рядами, посредствомъ которыхъ онъ опредѣляетъ координаты Луны и геометрическими представленіями, къ которымъ прибѣгали астрономы для объясненія лунныхъ неравенствъ.

Если мы нашли

$$x = A_1 \cos (n_1 t + \alpha_1) + A_2 \cos (n_2 t + \alpha_2)$$

и

$$y = A_1 \sin (n_1 t + \alpha_1) + A_2 \sin (n_2 t + \alpha_2),$$

то движеніе точки (x, y) можетъ быть представлено съ помощью эпицикла. Какъ будто точка (x, y) движется по кругу радіуса A_1 съ угловой скоростью n_1, а этотъ кругъ катится по другому имѣющему радіусъ A_2 и въ свою очередь вращающемуся съ угловой скоростью n_2 и т. д.

Нельзя не принести дани удивленія остроумію и проницательности древнихъ астрономовъ, которые, не будучи вооружены ни точными измѣрительными приборами, ни знаніемъ аналитической геометріи и дифференціальнаго исчисленія, создавали теоріи, правда неимѣющія реальнаго основанія, но дающія истинную картину небесныхъ явленій.

Въ заключеніе считаю своей пріятной обязанностью выразить мою сердечную благодарность В. С. Горбунову, весьма способному и любознательному студенту Горнаго Института, неутомимо помогавшему мнѣ въ производствѣ нѣкоторыхъ вычисленій и исполненію чертежей, съ добровѣстностью и знаніемъ дѣла, заслуживающими величайшей похвалы.

ГЛАВА I.

Зависимость между періодами звѣзднаго и синодическаго обращеній Луны.

1. Средняя продолжительность синодическаго мѣсяца Σ_0 получается изъ T_0 — періода звѣзднаго обращенія Луны по извѣстной формулѣ:

$$\Sigma_0 = T_0 \left[1 + m + m^2\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (1)$$

Среднее движеніе Луны въ минутахъ дуги $= 790'.6$, и, слѣдовательно,

$$T_0 = \frac{360 \,.\, 60}{790.'6} = 27^{\partial}.32, \quad (\text{или } 27^{\partial} 7^{ч} 43^{м} 11^{с}),$$

$$\Sigma_0 = 29^{\partial}.53 \text{ или } (29^{\partial} 12^{ч} 44^{м}).$$

Въ 27,32 дней Луна проходить $27{,}32 \,.\, n$ минутъ по долготѣ, гдѣ

$$n = 790'.6,$$

а Солнце въ то же время перемѣщается на $27{,}32\, mn$ или $T_0 mn$ минутъ дуги. Чтобы достигнуть соединенія съ Солнцемъ, если бы оно было неподвижнымъ, Лунѣ потребовалось бы $\frac{T_0 mn}{n}$ или $T_0 m$ дней, но въ этотъ промежутокъ времени Солнце нройдетъ еще $T_0 m^2 n$ минутъ дуги, слѣд. Луна достигнетъ слѣдующаго новолунія черезъ $T_0 m + T_0 m^2$ дней и т. д.

Итакъ, дуга, которую проходить Луна, равняется въ среднемъ

$$T_0 n \,(m + m^2 + m^3 + \ldots)$$

или

$$(\Sigma_0 - T_0)\, n = 2^{\partial}{,}21.790'.6 = 1747'.2 \text{ или } 29^{\circ}7'.2 \text{ (уголъ } \psi).$$

Стало быть всего въ теченіе средняго синодическаго мѣсяца Луна пройдетъ по долготѣ 389°7'.2.

Считая, какъ обыкновенно, синодическіе мѣсяцы отъ новолунія до новолунія, а время t (въ ср. солн. суткахъ) отъ прохожденія Луны черезъ перигей, мы опредѣляемъ данный синодическій мѣсяцъ изъ соотвѣтствующаго звѣзднаго по формулѣ:

$$\Sigma = T + \frac{\psi}{n_1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

гдѣ n_1 скорость движенія Луны въ той части ея орбиты, которая лежитъ между точками, соотвѣтствующими окончанію звѣзднаго мѣсяца и окончанію синодическаго.

Пусть A — мѣсто Луны въ моментъ новолунія, которымъ начинается какъ звѣздный, такъ и синодическій мѣсяцы, B — мѣсто Солнца въ моментъ окончанія звѣзднаго мѣсяца и, наконецъ C — мѣсто Солнца и Луны въ моментъ 2-го соединенія. Дуга AB точно извѣстна, если дано T, ибо, зная T, немедленно находимъ среднюю скорость Луны въ теченіе окончившагося звѣзднаго мѣсяца по формулѣ

$$n_1 = \frac{2\pi}{T},$$

и затѣмъ AB, равное

$$2\pi \, . \, \frac{n_1'}{n_1} = 2\pi . m_1,$$

гдѣ m_1 отношеніе среднихъ скоростей Солнца и Луны въ данный мѣсяцъ.

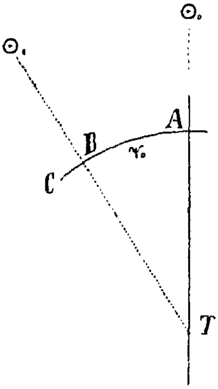
Замѣчая, что

$$\psi = AB + BC = 2\pi \, (m_1 + m_1^2 + \ldots),$$

можно написать

$$\Delta T = \frac{\psi}{n_2},$$

гдѣ n_2 средняя скорость въ теченіе промежутка времени $\Sigma - T$.



Черт. 1.

Луна проходитъ дугу AB (или ψ_0) со скоростью n_2, соотвѣтствующей ея мѣсту въ орбитѣ, въ τ единицъ времени или въ $\frac{2\pi m_1}{n_2}$ сутокъ; по когда Луна достигнетъ точки B, Солнце передвинется еще на $AB \frac{n_1'}{n_2}$, слѣдовательно чтобы достигнуть соединенія, Лунѣ потребуется еще $\frac{2\pi}{n_2} m_1^2$ сутокъ и т. д.

Итакъ

$$\Delta T = \frac{2\pi}{n_2} \, [m_1 + m_1^2 + \ldots],$$

слѣдовательно

$$\Sigma = T + \frac{\psi}{n_2} = T + \frac{2\pi}{n_2} \, (m_1 + m_1^2 + \ldots) =$$

$$= T \left[1 + \frac{n_1}{n_2} \, m_1 + \frac{n_1}{n_2} \, . \, m_1^2 \right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Примѣръ. Звѣздный мѣсяцъ 14 іюня—12 іюля 1912 г. начался въ $18^ч23^м.6$ 14-го іюня и продолжался $27^д10^ч26^м.8 = 27^д.435$. Соотвѣтствующая дуга ψ

$$= 27,435 \times \frac{(57',20 + 57',15)}{2} + id.m + id.m^2 + \ldots = 28^\circ,23 \times 60$$

въ минутахъ, или $28^\circ,23$, и слѣдовательно

$$\Sigma = T + \frac{\psi}{n_1} = 27^д.435 + \frac{28^\circ,23 \times 60}{910'} = 27^д.435 + 1^д.86 = 29^д.295.$$

Таблицы Гансена даютъ $29^д6^ч49^м.6$ или $29^д.29$.

Примѣчаніе. Мы опредѣлили BC изъ уравненія

$$BC = (m + m^2 + \ldots)\, AB,$$

гдѣ m средняя величина отношенія $\frac{n'}{n}$; но такъ какъ само отношеніе m измѣняется отъ мѣсяца до мѣсяца, то для большей точности слѣдуетъ принять

$$m_1 = \frac{57'17''}{n_1}$$

для іюля и

$$m_2 = \frac{61'2''}{n_1}$$

для января, соотвѣтственно чему измѣнится и множитель

$$(1 + m + m^2)$$

въ выраженіи ψ_1; онъ будетъ равенъ

$$1 + \frac{57'.3}{n_1} + \left(\frac{57'.3}{n_1}\right)^2 = \alpha_1$$

для іюля и

$$1 + \frac{61.05}{n_1} + \left(\frac{61.05}{n_1}\right)^2 = \alpha_2$$

для января.

Въ среднемъ

$$1 + m + m^2 = 1,0804.$$

Для іюля

$$1 + m_1 + m_1{}^2 = 1 + \frac{57'.3}{n_1} + \left(\frac{57'.3}{n_1}\right)^2$$

или *)

$$\alpha_1 = 1 + \frac{57.3}{59'.2} \cdot \frac{59'.2}{n_0} \cdot \frac{n_0}{n_1} + m^2 = 1 + m \cdot \frac{n_0}{n_1} \cdot \frac{57'.3}{59.2} + m^2 =$$

---

*) Здѣсь мы отбрасываемъ квадраты $\frac{\Delta n}{n_0}$ и $\frac{\Delta n'}{n'}$.

$$= 1 + m\left(1 \pm \frac{\Delta n}{n_0}\right)\left(1 - \frac{1.9}{59.2}\right) + m^2 = 1 + m + m^2 \pm \frac{\Delta n}{n} m -$$

$$- \frac{1.9}{59.2} m = 1 + m + m^2 - 0.032\, m \pm \frac{\Delta n}{n_0} \,.\, m$$

(для іюля), и

$$\alpha_2 = 1 + m + m^2 + 0.032\, m \pm \frac{\Delta n}{n_0} \,.\, m$$

(для января).

Здѣсь Δn приращеніе скорости въ минутахъ,

$$n_0 = 790'.6.$$

Сообразно этому исправленію, формула (3) приметъ видъ

$$\Sigma = T\left[1 + m + m^2 \pm \frac{\Delta n}{n_0} m \pm 0.032\, m\right] \ldots \begin{matrix} - \text{ для іюля} \\ + \text{ для января.} \end{matrix}$$

2. Изъ формулы (2) слѣдуетъ, что продолжительность синодическаго обращенія зависитъ, caeteris paribus, отъ отношенія $\frac{\psi}{n_1}$.

Зимой уголъ ψ больше средняго, а лѣтомъ, когда Солнце движется медленнѣе,—меньше средняго, слѣдов. вообще *зимніе синодическіе мѣсяцы длиннѣе лѣтнихъ.*

Когда Солнце вступаетъ въ перигелій, суточное его движеніе равняется приблизительно 61'.14, а въ іюлѣ, при прохожденіи черезъ афелій, около 57'.19.

За мѣсяцъ эти скорости нѣсколько измѣнятся, такъ что для января нужно взять $n' = 61'2''$, а для Іюля $57'17''$.

По этимъ даннымъ мы немедленно находимъ величины угла ψ для января и іюля.

Мы имѣемъ для среднихъ величинъ T и m

$$\frac{27{,}32 \times 3662''}{60^2}(1 + m + m^2) = 30^\circ.02,$$

$$\frac{27{,}32 \times 3437''}{60^2}(1 + m + m^2) = 28^\circ.16.$$

Итакъ въ январѣ уголъ ψ больше соотвѣтствующей элонгаціи Солнца относительно Луны въ іюлѣ на 1°.86, а эту дугу Луна проходитъ, двигаясь со средней скоростью 790'.6,—въ 3ч.38.

Отсюда заключаемъ, что отъ неравномѣрности движенія Земли по ея орбитѣ продолжительность синодическаго мѣсяца измѣняется противъ средней величины на ± 1 часъ 42 мин. Другая причина измѣненій синодическаго мѣсяца — неравномѣрность, гораздо болѣе значительная,— движенія самой Луны.

Такъ какъ ея скорость зависитъ главнымъ образомъ отъ угловаго разстоянія ея отъ перигея, то величина n_1 $(n \pm \Delta n)$ опредѣляется мѣстомъ Луны, которое она занимала на своей орбитѣ въ моментъ возвращенія къ исходной точкѣ, т. е. къ новолунію. Она могла быть въ перигеѣ, и тогда скорость максимальная, или въ апогеѣ, двигаясь въ этомъ случаѣ съ наименьшей скоростью, и т. д.

Вообще Δn зависитъ отъ средней аномаліи Луны въ моментъ вторичнаго новолунія. Кромѣ того, хотя и въ меньшей степени, Δn зависитъ отъ всѣхъ неравенствъ луннаго движенія.

Прежде всего обращаетъ на себя вниманіе эвекція, коэффиціентъ которой составляетъ почти $\frac{1}{6}$ эллиптическаго неравенства. Отъ одного этого неравенства скорость Луны увеличивается или уменьшается въ извѣстныхъ случаяхъ на $17'$ въ дугѣ, причемъ эвекція сливается съ эллиптическимъ неравенствомъ, увеличивая или уменьшая его коэффиціентъ и измѣняя аргументъ его, равный, какъ извѣстно

$$cnt + \varepsilon - \omega$$

или

$$nt + \varepsilon - \omega_0 - \delta\omega_0 - \Delta\omega_0,$$

гдѣ $\delta\omega_0$ постоянная часть $\int \frac{d\omega}{dt} . dt$ *), а $\Delta\omega_0$ періодическая.

Если $2\omega - 2\odot = 0$, то $\cos(2\xi - \varphi)$, будучи вообще равенъ

$$\cos(2\omega - 2\odot + \varphi),$$

оказывается совпадающимъ съ $\cos\varphi$, и эксцентрицитетъ лунной орбиты увеличивается съ 0.0549 до 0.064; когда же

$$2\omega - 2\odot = \pm \pi,$$

то

$$2e\cos\varphi + 0{,}33e\cos(2\xi - \varphi) = \left(2e - \frac{1}{3}e\right)\cos\varphi,$$

и эксцентрицитетъ оказывается уменьшеннымъ до 0.045.

Когда $2\omega - 2\odot = 0$, или, что то же, когда $2\xi = 2\varphi$, то коэффиціентъ варіаціи сливается съ коэффиціентомъ при $\cos 2\varphi$, т. е. отъ варіаціи увеличивается коэффиціентъ при второмъ членѣ эллиптическаго неравенства, подобно тому, какъ отъ эвекціи увеличивается въ этомъ случаѣ первый членъ эллиптическаго неравенства.

Такимъ образомъ изслѣдованіе неравенствъ лунныхъ мѣсяцевъ сводится прежде всего къ изученію варіацій угловой скорости.

---

*) Точнѣе—пропорціональная времени.

ГЛАВА II.

Угловая скорость Луны и зависимость ея отъ варіацій элементовъ.

3. Ограничиваясь пока главнѣйшими неравенствами, возьмемъ изъ общаго выраженія $\frac{dv}{dt}$ слѣдующіе члены:

$$\frac{dv}{dt} = n \Big\{ 1 + 2e\, cos\, \varphi + 0{,}33e\, cos\, (2\xi - \varphi) + 0{,}4e\, cos\, 2\xi +$$

$$+ \frac{5}{2} e^2\, cos\, 2\varphi - 3m^2 e' \,.\, cos\, \varphi' - \frac{21}{8} m \,.\, \frac{a}{a_1} cos\, \xi - \frac{1}{2} \gamma^2\, cos\, 2\eta +$$

$$+ me'\, cos\, (2\xi - \varphi') + \frac{105}{16} mee'\, cos\, (2\xi - \varphi - \varphi') \Big\} \quad . \quad . \quad (4)$$

Аргументъ.	Назв. неравенства.	Величины коэффиц. въ минутахъ дуги.
φ	Эллипт. нер.	$86'.8$
2φ		$6'.0$
$2\xi - \varphi$	Эвекція.	$17'.4$
2ξ	Варіація.	$18'.2$
φ'	Годовое ур.	$-0'.22$
ξ	Параллакт. нер.	$-0'.4$
2η	Нерав. завис. отъ наклонности.	$-3'.2$
$2\xi - \varphi'$	Годовая варіація.	$+0'.8$
$2\xi - \varphi - \varphi'$	» эвекція.	$+0'.36$

Примѣчаніе. Я ввожу новыя названія: «годовая» варіація и таковая же эвекція. При $\varphi' = 0$, когда Солнце бываетъ въ перигеліи, т.-е. въ январѣ, соотв. члены $\frac{dv}{dt}$ получаютъ видъ $+nme'\, cos\, \xi + + n \frac{105}{16} mee' \,.\, cos\, (2\xi - \varphi)$, а при $\varphi' = 180°$ (въ іюлѣ) то же съ минусомъ. Такимъ образомъ въ зависимости отъ этихъ членовъ $\frac{dv}{dt}$ претерпѣваетъ измѣненія по времени года.

4. Варіаціи $\frac{dv}{dt}$ зависятъ главнымъ образомъ отъ $\Delta\omega$ и Δe, т.-е. отъ измѣненій долготы перигея и эксцентрицитета. Вводя въ предъидущее выраженіе $\frac{dv}{dt}$ вмѣсто φ величину $\varphi_0 - \Delta\omega$ или $nt + \varepsilon - \omega_0 - \Delta\omega_0$, а вмѣсто $e \,.\,.\,.\, e_0 + \Delta e \,.\, e$, мы можемъ представить $\frac{dv}{dt}$ въ эллиптическомъ видѣ:

$$\frac{dv}{dt} = n\,\{1 + 2e\,(1 + \Delta e)\,\cos\,[nt + \varepsilon - \omega_0 - \Delta\omega_0]\}$$

или

$$\frac{dv}{dt} = n\,\{1 + 2e_1 \cos\varphi_1\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Варіація $\Delta\omega$ заключаетъ, какъ извѣстно, постоянные и періодическіе члены, а Δe только періодическіе.

Въ моей «Теоріи Движенія Луны» даны, между прочимъ, слѣдующія выраженія $\Delta\omega$ и Δe (см. стр. 96 и 115):

$$\Delta\omega = -\frac{15}{8} m \sin(2\xi - 2\varphi) - \frac{9}{4}\frac{m^2}{e}\sin(2\xi - \varphi) + $$

$$+ \frac{1}{4}\frac{m^2}{e}\,.\,\sin(2\xi + \varphi) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

и

$$\Delta e = + \frac{15}{8} me \cos(2\xi - 2\varphi) + \frac{9}{4} m^2 \cos(2\xi - \varphi) + $$

$$+ \frac{1}{4} m^2 \cos(2\xi + \varphi) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

Рядъ для $\Delta\omega$ необходимо еще дополнить членомъ

$$\delta\omega = \left(\frac{3}{4} m^2 + \frac{225}{32} m^3 + \frac{4071}{128} m^4 + \ldots\right) nt,$$

т. е. частью, пропорціональной времени, и ввести поправку въ коэффиціентъ при $\sin(2\xi - 2\varphi)$, зависящую отъ членовъ эвекціи съ m^2 и m^3.

Замѣтимъ кстати, что пропорціональная времени часть варіаціи ω можетъ быть представлена весьма приблизительно величиной $\frac{3}{2} m^2 nt$ или $0.0084\,nt$.

Какъ извѣстно, точная величина постоянной части $\frac{d\omega}{dt}$ равняется $0.008452\, n$*), стало-быть ошибка, которую мы дѣлаемъ, принимая $\delta\omega = \frac{3}{2} m^2 nt$ не превышаетъ 0.0001.

Что касается до послѣдующихъ періодическихъ членовъ съ множителемъ $\sin(2\xi - 2\varphi)$, то, пользуясь точнымъ выраженіемъ коэффиціента эвекціи по долготѣ и сравнивая его съ первымъ членомъ равнымъ $\frac{15}{4} me$,

---

*) См. мое изслѣдованіе „Движеніе луннаго перигея“ стр. 69.

мы находимъ весьма близкое отношеніе суммы ряда къ 1-му члену, а именно $\frac{3}{2}$, такъ что можно бы принять

$$\Delta\omega = -\frac{3}{2}\cdot\frac{15}{8}\, m\, sin\,(2\xi - 2\varphi)\,\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

но для большей точности я пользуюсь формулой (28) Гл. V. Движ. луннаго перигея и принимаю:

$$\Delta\omega = -\left(\frac{15}{8}\, m + 3\left(\frac{15}{8}\right)^2 m^2\right) sin\,(2\xi - 2\varphi),$$

что̀ сводится почти къ тому-же, если ввести дополнительный членъ съ аргументомъ 2ξ*)

Итакъ

$$\Delta\omega = \frac{3}{2} m^2 nt - \left(\frac{15}{8} m + 3\left(\frac{15}{8}\right)^2 m^2\right) sin\,(2\xi - 2\varphi) - \frac{9}{4}\frac{m^2}{e}\, sin\,(2\xi - \varphi) +$$
$$+ \frac{1}{4}\cdot\frac{m^2}{e}\, sin\,(2\xi + \varphi)\,\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

или въ градусахъ дуги $\left(\text{по умноженіи на } \frac{360}{2\pi}\right)$.

$$\Delta\omega = \frac{3}{2}\, m^2 nt - 11^\circ.44\, sin\,(2\omega - 2\odot) - 13^\circ.145\, sin\,(2\xi - \varphi) +$$
$$+ 1^\circ.46\, sin\,(2\xi + \varphi)\,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Подставляя въ формулу (5) вмѣсто e_1 и φ_1 возмущенныя величины эксцентрицитета и средней аномаліи, мы можемъ представить $\frac{dv}{dt}$ въ такомъ видѣ:

$$\frac{dv}{dt} = n_0\,(1 + 2e_0\, cos\,\varphi_0) + 2ne\, sin\,\varphi_0\, \Delta\omega + 2ne\,\Delta e\, cos\,\varphi_0\ . \quad (11\,a)$$

или

$$\frac{dv}{dt} = n_0\,(1 + 2e_0\, cos\,\varphi_0) + \left(\frac{dv}{dt}\right)_\omega + \left(\frac{dv}{dt}\right)_e\ .\ .\ .\ . \quad (11\,b)$$

гдѣ члены $\left(\frac{dv}{dt}\right)_\omega$ и $\left(\frac{dv}{dt}\right)_e$ представляютъ варіаціи скорости, зависящія соотвѣтственно отъ движенія перигея и отъ варіаціи эксцентрицитета.

Замѣтимъ, что въ частныхъ случаяхъ выдѣленіе возмущенной части $\frac{dv}{dt}$ производится безъ всякихъ затрудненій по общей формулѣ (6), пользуясь же формулой 11-ой, мы можемъ удобно сравнить варіаціи $\frac{dv}{dt}$, зависящія отъ e и ω.

5. Теорема. Увеличеніе долготы перигея на малый уголъ $\Delta\omega$ (въ частяхъ радіуса) равносильно увеличенію эксцентрицитета въ выраженіи угловой скорости, когда Луна движется въ 1-мъ или 3-мъ квадрантѣ,

---

*) См. стр. 63 уравн. (26) „Движ. л. пер.“.

считая отъ перигея, и — уменьшенію e, когда Луна находится во 2-мъ или 4-мъ квадрантѣ.

Аналитически:

$$\frac{dv}{dt} = n + 2e\,(1 \pm \Delta\alpha\omega)\cos\varphi \,.\, n,$$

при чемъ $\Delta\alpha\omega$ имѣетъ знакъ плюсъ, когда Луна удаляется отъ линіи апсидъ, и знакъ —, когда она приближается къ большой оси своей орбиты.

Для простоты разсужденія допустимъ, что $\Delta\omega$ представляетъ собою приращеніе долготы перигея, сохраняющее свой знакъ въ теченіе всего обращенія.

Мы имѣемъ по теоремѣ Тэйлора:

$$\frac{dv}{dt} = n + 2ne\cos\varphi_0 + 2ne\sin\varphi_0\,\Delta\omega,$$

гдѣ

$$\varphi_0 = cnt + \varepsilon - \omega_0$$

(въ предположеніи, что

$$\varphi = cnt + \varepsilon - \omega_0 - \Delta\omega).$$

Для каждаго значенія φ_0 въ данномъ квадрантѣ имѣется уголъ $\varphi_1 = 90 - \varphi_0$, слѣдовательно для любой пары аргументовъ φ_0 и φ_1 можно написать:

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_1 = n + 2ne\cos\varphi_0 + 2ne\sin\varphi_0\,\Delta\omega =$$

$$= n + 2ne\cos\varphi_0 + 2ne\cos\varphi_1\,\Delta\omega \;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (12)$$

и

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_2 = n + 2ne\cos\varphi_1 + 2ne\sin\varphi_1\,\Delta\omega =$$

$$= n + 2ne\cos\varphi_1 + 2ne\cos\varphi_0\,\Delta\omega \;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (13)$$

Въ виду незначительности $\Delta\omega$ можно принять для даннаго квадранта $\Delta\omega_0 = \Delta\omega_1$ и слѣдов. въ среднемъ, производя перестановку членовъ въ уравненіяхъ (12) и (13), получаемъ:

$$\frac{dv}{dt} = n + 2ne\,(1 + \Delta\omega)\cos\varphi$$

Итакъ эксцентрицитетъ оказывается увеличеннымъ въ отношеніи $(1 + \Delta\omega) : 1$.

Во 2 квадрантѣ беремъ

$$\varphi_0 = 90^\circ + \alpha \quad \text{и} \quad \varphi_1 = 180^\circ - \alpha.$$

Для каждой пары аргументовъ этого вида:

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_1 = n + (2e \cos\varphi_0 + 2e \cos(90 - \varphi_0)\,\Delta\omega)\, n$$

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_2 = n + (2e \cos\varphi_1 + 2e \cos(90 - \varphi_1)\,\Delta\omega)\, n.$$

Но

$$\cos(90 - \varphi_0) = \cos\alpha = -\cos(180 - \alpha) = -\cos\varphi_1$$

и

$$\cos(90 - \varphi_1) = \sin\alpha = -\cos(90^\circ + \alpha) = -\cos\varphi_0$$

слѣдовательно

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_1 = n\,[1 + 2e \cos\varphi_0 - 2e \cos\varphi_1\, \Delta\omega]$$

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_2 = n\,[1 + 2e \cos\varphi_1 - 2e \cos\varphi_0\, \Delta\omega],$$

слѣдовательно вообще

$$\frac{dv}{dt} = n + 2ne\,(1 - \Delta\omega) \cos\varphi.$$

Въ 3-мъ квадрантѣ

$$\varphi_0 = 180^\circ + \alpha \quad \text{и} \quad \varphi_1 = 270^\circ - \alpha,$$

слѣдовательно

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_1 = n + n\,[2e \cos\varphi_0 + 2e \cos(270^\circ - \alpha)\,\Delta\omega]$$

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_2 = n + n\,[2e \cos\varphi_1 + 2e \cos(180 + \alpha)\,\Delta\omega]$$

или

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_1 = n + 2ne \cos\varphi_0 + 2ne \cos\varphi_1\, \Delta\omega$$

и

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_2 = n + 2ne \cos\varphi_1 + 2ne \cos\varphi_0\, \Delta\omega$$

и вообще

$$\frac{dv}{dt} = n + 2ne \cos\varphi_0\,(1 + \Delta\omega).$$

Наконецъ въ 4-мъ квадрантѣ

$$\varphi_0 = 270^\circ + \alpha \quad \text{и} \quad \varphi_1 = 360^\circ - \alpha$$

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_1 = n + n\,[2e \cos\varphi_0 + 2e \sin(270^\circ + \alpha)\,\Delta\omega]$$

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_2 = n + n\,[2e\cos\varphi_1 + 2e\sin(360^\circ - \alpha)\,\Delta\omega]$$

или

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_1 = n + 2ne\cos\varphi_0 - 2ne\cos(360^\circ - \alpha)\,\Delta\omega = n + 2ne\cos\varphi_0\,(1 - \Delta\omega)$$

и

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_2 = n + 2ne\cos\varphi_1 - 2ne\cos(270^\circ + \alpha)\,\Delta\omega = n + 2ne\cos\varphi_1\,(1 - \Delta\omega).$$

Вообще въ послѣдней четверти

$$\frac{dv}{dt} = n + 2ne\cos\varphi\,(1 - \Delta\omega).$$

Если $\Delta\omega$ положительно, то въ 1-мъ квадрантѣ скорость увеличивается, потому-что $\cos\varphi$ все время со знакомъ $+$, а во 2-й четверти

$$2ne\,(1 - \Delta\omega)\cos\varphi$$

отрицательно, причемъ абсолютная величина этого члена менѣе $2ne\cos\varphi$, стало-быть

$$n + 2ne\,(1 - \Delta\omega)\cos\varphi > n + 2ne\cos\varphi,$$

т.-е. возмущенная скорость болѣе нормальной, какъ и въ 1-й четверти. Отъ апогея до перигея, т. е. въ 3-й и 4-й четвертяхъ скорость оказывается менѣе нормальной, такъ что въ среднемъ ускореніе было-бы равно нулю, но за мѣсяцъ перигей подвинется впередъ (ибо $\Delta\omega$ положительно), слѣдовательно дуга, которую пройдетъ Луна отъ перигея до перигея окажется болѣе 360°, и такимъ образомъ въ общемъ получится нѣкоторое ускореніе.

6. Чѣмъ больше скорость, тѣмъ менѣе продолжительность обращенія, слѣд. поступательное движеніе перигея нѣсколько сокращаетъ звѣздный мѣсяцъ. Не трудно найти и величину этого сокращенія.

Если-бы не было движенія перигея, то звѣздный мѣсяцъ равнялся-бы аномалистическому, превышающему звѣздный на $5^{ч}35^{м}.42$ или на $0^{d}.2329$.

Отсюда вытекаетъ естественное заключеніе, что дѣйствительный аномалистическій мѣсяцъ почти точно равняется тому воображаемому періоду обращенія Луны, который наблюдался-бы при отсутствіи движенія перигея.

Пусть $н$ средняя скорость Луны въ этомъ идеальномъ движеніи, $н + \Delta н$ дѣйствительная, наблюдаемая средняя скорость. Мы имѣемъ по предъидущему

$$н + \Delta н = 790'.6 = n_0$$

и
$$\frac{21600}{n + \Delta n} = \frac{21600}{n} - 0^d.2329.$$

Отсюда
$$\Delta n = \frac{0^d.2329 \,.\, n_0^{\,2}}{21600} = \frac{0^d.2329}{T_0} \,.\, n_0,$$

или въ числахъ
$$\Delta n = 0.00852\, n_0 = \frac{1}{117} n_0 = 6'.68.$$

Итакъ поступательное движенiе перигея увеличиваетъ среднюю скорость движенiя Луны на $6'.68$ и уменьшаетъ звѣздный мѣсяцъ на $0.^d2329$ или на $5^ч35^м.42$.

Замѣчательно еще слѣдующее соотношенiе между Δn и n_0.

Весьма близко
$$\Delta n = \frac{3}{2} m^2 n_0,$$

т. е.
$$\Delta n = \frac{d\omega}{dt} \,. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

ГЛАВА III.

Неравенства звѣзднаго мѣсяца.

7. Когда начальное новолуніе совпадаетъ съ перигеемъ, то къ концу звѣзднаго обращенія Луна оказывается еще позади перигея, который въ теченіе мѣсяца перемѣстился изъ π_0 въ π_1 на уголъ, равный $3^\circ 3' +$ періодическое приращеніе долготы перигея (см. черт. 2), а такъ какъ движеніе Луны около перигея самое быстрое, то въ результатѣ окажется, что за истекшій мѣсяцъ Луна нѣсколько потеряетъ въ скорости.

Дѣйствительно, въ началѣ движенія Луна находилась въ точкѣ перигея, а въ концѣ мѣсяца еще не достигаетъ его, ибо онъ ушелъ впередъ; такимъ образомъ она какъ бы избѣгаетъ тѣхъ точекъ своей орбиты, гдѣ движеніе самое быстрое,—въ среднемъ будетъ двигаться медленнѣе средняго, и стало-быть мѣсяцъ окажется продолжительнѣе.

Наоборотъ, когда начальное новолуніе совпадаетъ съ моментомъ вступленія Луны въ апогей, она избѣгнетъ, отставъ отъ апогея къ концу мѣсяца, тѣхъ точекъ орбиты, гдѣ движеніе самое медленное, слѣд. въ результатѣ нѣсколько выиграетъ въ скорости,—и мѣсяцъ укоротится.

Возьмемъ изъ общаго выраженія возмущенной долготы Луны главнѣйшіе эллиптическіе члены и тѣ, которые зависятъ отъ наиболѣе замѣтныхъ солнечныхъ возмущеній. Отбрасывая совершенно сравнительно мелкіе періодическіе члены, я беру болѣе или менѣе точные коэффиціенты главнѣйшихъ членовъ (эллиптическаго неравенства, эвекціи и пр.) и представляю v въ такой формѣ:

$$
\begin{aligned}
v = nt + \varepsilon + 377'.3\,\underset{1}{\sin}\,\varphi + 12'.8\,\underset{2}{\sin}\,2\varphi + 76'.5\,\sin\underset{3}{(}2\xi - \varphi) + \\
+ 2'.9\,\sin\underset{4}{(}2\xi + \varphi) + 39'.5\,\underset{5}{\sin}\,2\xi - 11'.2\,\underset{6}{\sin}\,\varphi' - 1'.8\,\underset{7}{\sin}\,\xi - \\
- 6'.8\,\underset{8}{\sin}\,2\eta + 2'.3\,\sin\underset{9}{(}2\xi - \varphi') + 3'.\,\sin(\underset{10}{2\xi} - \varphi - \varphi') \ldots \quad (15)
\end{aligned}
$$

Первые 2 періодическіе члена—эллиптическіе, слѣдующіе три даютъ поправки средней долготы, зависящія отъ угловыхъ разстояній Солнца отъ Луны и отъ перигея ея орбиты, наконецъ остальные, кромѣ члена

— $6'.8 \sin 2\eta$ — зависятъ отъ положенія Солнца на его орбитѣ, т. е. отъ времени года. Членъ съ аргументомъ 2η зависитъ отъ наклонности и положенія линіи узловъ.

8. Прежде чѣмъ идти далѣе, необходимо ввести въ главный эллиптическій членъ ($2e \sin \varphi$) поправку, зависящую отъ тангенціальнаго ускоренія Луны.

Въ моей книгѣ «Т. Дв. Луны» я показалъ, что явленія эвекціи и варіаціи могутъ быть объяснены измѣненіемъ произвольныхъ постоянныхъ эллиптическаго движенія. Въ каждый данный моментъ координаты Луны, а также скорость ея представляются рядомъ періодическихъ членовъ вида

$$Ae^{\lambda} e'^{\nu} \cos (int + i'nt + \mu) \text{ для } \frac{1}{r}$$

и

$$Be^{\lambda} e'^{\nu} \sin (int + i'nt + \mu) \text{ для } v.$$

Пренебрегая наклонностью орбиты и отбрасывая всѣ члены съ множителемъ e', мы имѣемъ возможность представить себѣ съ достаточной ясностью всѣ характерныя особенности луннаго движенія, если только примемъ во вниманіе въ разложеніяхъ $\frac{1}{r}$ и v члены съ аргументами

$$\varphi, \quad 2\xi - \varphi \quad \text{и} \quad 2\xi.$$

Мы имѣемъ:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a}\left\{1 + e \cos \varphi + (m^2 + \ldots) \cos 2\xi + \left(\frac{15}{8} m + \ldots\right) e \cos (2\xi - \varphi)\right\}$$

и

$$v = nt + \varepsilon + 2e \sin \varphi + \left(m^2 + \frac{3}{8} m^2 + \ldots\right) \sin 2\xi +$$

$$+ \left(\frac{15}{4} m + \ldots\right) e \sin (2\xi - \varphi).$$

Разсмотримъ прежде всего члены относящіеся къ варіаціи (аргументъ 2ξ) и замѣтимъ, что членъ $\frac{3}{8} m^2 \sin 2\xi$ въ выраженіи v зависитъ единственно отъ возмущающей силы T.

Если положить

$$a\Delta a = \frac{3}{2} m^2 a \cos 2\xi,$$

то линейная скорость Луны w можетъ быть представлена эллиптической формулой *):

$$w = \left(\frac{2\mu}{r} - \frac{\mu_1}{a_3}\right)^{\frac{1}{2}},$$

---

*) См. § 22 „Т. Дв. Луны“.

а изъ условія, что координаты r и v, а также скорость $\frac{dv}{dt}$ могутъ быть представлены въ эллиптической формѣ, находимъ:

$$\Delta\varepsilon = E(nt) = -3\,sin^2\,sin\,2\xi + \frac{3}{8}m^2\,sin\,2\xi = -\frac{21}{8}m^2\,sin\,2\xi$$

$$e\Delta e = \frac{9}{4}m^2\,cos\,(2\xi - \varphi) + \frac{1}{4}m^2\,cos\,(2\xi + \varphi)$$

и

$$\Delta\omega = -\frac{9}{4}\,\frac{m^2}{e}\,sin\,(2\xi - \varphi) + \frac{1}{4}\cdot\frac{m^2}{e}\,sin\,(2\xi + \varphi).$$

Такимъ образомъ варіація можетъ быть включена, подобно эвекціи, въ эллиптическія выраженія координатъ и скорости Луны.

Будемъ называть для краткости эллипсъ, соотвѣтствующій выраженію $\frac{1}{r}$ — *пластическимъ*, такъ какъ онъ постоянно расширяется и сокращается въ зависимости отъ угловаго разстоянія ☉☽, и обозначимъ скорость въ пластической орбитѣ символомъ $\left(\frac{dv}{dt}\right)_n$.

Мы нашли, при разсмотрѣніи явленій варіаціи (см. стр. 116 «Т. Дв. Луны»).

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_n = n + 2ne\,cos\,\varphi - 3m^2n\,cos\,2\xi + 5m^2n\,cos\,2\xi$$

и

$$\left(\frac{dv}{dt}\right) = n + 2ne\,cos\,\varphi - 3m^2n\,cos\,2\xi + \frac{3}{4}m^2n\,cos\,2\xi + 5m^2n\,cos\,2\xi.$$

Члены

$$-3m^2n\,cos\,2\xi \text{ и } \frac{3}{4}m^2n\,cos\,2\xi$$

въ обоихъ выраженіяхъ представляютъ собою варіаціи долготы эпохи ($\Delta\varepsilon$),

а $\quad 5m^2n\,cos\,2\xi$ — сумму $2\Phi\,(nt)\,n\,cos\,\varphi + 2\Pi\,(nt)\,ne\,sin\,\varphi$,

т. е. часть $\frac{dv}{dt}$, зависящую отъ измѣненій Δe и $\Delta\omega$, включаемыхъ извѣстнымъ образомъ въ $e\,cos\,\varphi$.

Мы видимъ, что $\frac{dv}{dt}$ можетъ равняться $\left(\frac{dv}{dt}\right)_n$, какъ должно быть, только при условіи измѣненія эксцентрицитета или введенія въ $2ne\,cos\,\varphi$ (ур. для $\frac{dv}{dt}$) новой варіаціи $\Delta\omega$. Если принять

$$\Delta\omega = -x\cdot\frac{m^2}{e}\,sin\,2\xi,$$

то

$$2e\,sin\left(\varphi_0 + \frac{xm^2\,sin\,2\xi}{e}\right) = 2e\,sin\,\varphi_0 + 2e\,cos\,\varphi_0\cdot\frac{x\,.\,m^2\,sin\,2\xi}{e} =$$

$$= 2e\,sin\,\varphi_0 + 2m^2x\,cos\,\varphi_0\,sin\,2\xi.$$

Для точекъ орбиты, лежащихъ близко отъ линіи апсидъ, $cos\,\varphi_0$ почти $= \pm 1$ и потому мы могли бы принять для перигея и апогея

$$\pm 2m^2 x \, sin\, 2\xi = \pm \frac{3}{8} m^2 \, sin\, 2\xi,$$

откуда

$$x = \frac{3}{16}.$$

Но $\frac{3}{8} m^2 \, sin\, 2\xi$ та часть коэффиціента варіацiи $\left(изъ\ \frac{11}{8} m^2 \, sin\, 2\xi\right)$, которая зависитъ единственно отъ вліянія возмущающей силы T.

Допуская, что послѣдующіе члены варіаціи (съ m^3, m^4 и пр.) увеличиваются въ томъ же отношеніи отъ дѣйствія силы T, можно принять

$$E_2(nt) = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{16} m^2 \, sin\, 2\xi,$$

ибо полная величина коэффиціента варіаціи относится къ 1-му члену какъ $3:2$, стало быть вмѣсто $\frac{3}{16}$ беремъ

$$x = \frac{9}{32},$$

и потому

$$2m^2 x \, cos\,\varphi_0 \, sin\, 2\xi = \frac{9}{16} m^2 \, cos\,\varphi_0 \, sin\, 2\xi$$

и

$$\Delta\omega = -\frac{9}{32} \frac{m^2}{e} cos\,\varphi_0 \, sin\, 2\xi.$$

Когда Луна въ 1-мъ случаѣ приближается къ перигею и къ той же звѣздѣ, съ которой совпадала въ началѣ мѣсяца, то

$$cos\,\varphi_0 = cos\, 357^\circ$$

и

$$2m^2 x \, cos\,\varphi_0 \, sin\, 2\xi = -\frac{9}{16} m^2 \, sin\, 55^\circ.6 \,.\, cos\, 3^\circ . \frac{21600}{2\pi} = +8'.91;$$

во 2-мъ случаѣ

$$cos\,\varphi_0 = -cos\, 3^\circ$$

и

$$2m^2 x \, cos\,\varphi_0 \, sin\, 2\xi = +\frac{9}{16} m^2 \, sin\, 55^\circ.6 \,.\, cos\, 3^\circ \frac{21600}{2\pi} = +8'.91.$$

Что касается до $\Delta\omega$, то вычисленіе даетъ:

$$\Delta\omega = +\frac{9}{32} \frac{m^2}{e} \cdot \frac{360}{2\pi} sin\, 55^\circ.6 = 1^\circ.4,$$

слѣдов. вмѣсто *sin* 357° нужно брать *sin* (357° — 1°.4) или *sin* 355°.6, а вмѣсто *sin* 177° ... *sin* 175°.6 или + *sin* 4°.4, слѣд. для 1-го случая

$$v = nt + \varepsilon + 2e\sin\left(357° + \frac{9}{32}\,\frac{m^2}{e}\cdot\frac{360}{2\pi}\sin 2\xi\right) + \ldots =$$

$$= nt + \varepsilon - 2e\sin\left(357° + \frac{9}{32}\,\frac{m^2}{e}\sin 55°.6\right) = nt + \varepsilon - 28'.94.$$

а для 2-го

$$v = nt + \varepsilon + 2e\sin\left(177° + \frac{9}{32}\,\frac{m^2}{e}\sin 2\xi\right) =$$

$$= nt + \varepsilon + 2e\sin(177° - 1°.4) = nt + \varepsilon + 28'.94.$$

Итакъ, если вычислять v по общей формулѣ, т. е. принимать коэффиціентъ варіаціи равнымъ не $(2m^2 + \ldots)$, какъ въ пластической орбитѣ, а $\left(\frac{11}{8}\,m^2 + \ldots\right)$, то при вычисленіи v для 1-го случая (перигей = новолуніе) нужно вычитать изъ полученнаго результата 8'.91, а во 2-мъ случаѣ прибавлять 8'.91.

9. Обратимся теперь къ разсмотрѣнію движенія Луны въ двухъ главныхъ положеніяхъ линіи апсидъ относительно новолунія.

Для простоты разсужденія предположимъ еще, что линія соединеній въ началѣ мѣсяца совпадаетъ не только съ линіей апсидъ лунной орбиты, но и съ главной осью орбиты Солнца.

При разборѣ обоихъ главныхъ случаевъ мы разсмотримъ отдѣльно четыре возможныя комбинаціи

1 и 2	Совпаденіе новолунія съ перигеемъ	⊙ въ афеліи ⊙ въ перигеліи
3 и 4	Совпаденіе новолунія съ апогеемъ	⊙ въ перигеліи ⊙ въ афеліи

Періодическій членъ съ аргументомъ 2η пока оставимъ безъ вниманія.

I_a Совпаденіе новолунія съ прохожденіемъ Луны черезъ перигей, а Солнца черезъ афелій.

Для начальнаго момента (случай ● $\pi\pi'$)

$$v = \varepsilon.$$

Для конца соотвѣтствующаго звѣзднаго мѣсяца

$$\varphi = 357° - 1°.4 = 355°.6,\quad \varphi' = 180° + 27{,}32 \times \frac{d\varphi_1}{dt} =$$

$$= 180° + 27'32\,.\,57{,}3' = 206°.1.$$

$$\xi = -\varphi' + 180° = -26°.1,\ 2\xi = -52°.0,\ 2\xi - \varphi\ {}^{*)} = -49°.2$$

$$2\xi + \varphi = 304°.8,\ 2\xi - \varphi' = 101°{,}7,\ 2\xi - \varphi - \varphi' = -73°.3$$

---

*) Въ этомъ и послѣд. членахъ беремъ φ среднее, т. е. 357°.

и, слѣдовательно,

$$v = nT + \varepsilon - 377'.3\, sin\, 4^{\circ}.4 - 12'.8\, sin\, 6^{\circ} - 76'.5\, sin\, 49^{\circ}.2 -$$
$$- 2'.9\, sin\, 55^{\circ}.2 - 39'.5\, sin\, 52^{\circ}.2 + 11'.2\, sin\, 26^{\circ}.1 + 1'.8\, sin\, 26^{\circ}.1 + 0 +$$
$$+ 2'.3\, sin\, 78^{\circ}.3 - 3'\,.\, sin\, 75^{\circ}.3 = nT + \varepsilon - 28'.94 - 1'.36 - 57'.9 -$$
$$- 2'.4 - 31'.2 + 4'.93 + 0'.8 + 0 + 2'.2 - 2'.9 = nT + \varepsilon - 121'.8 +$$
$$+ 5'.03\ ^{*)} = nT + \varepsilon - 116'.8.$$

Въ началѣ мѣсяца долгота была равна ε, а такъ какъ за T дней Луна описала относительно звѣздъ ровно 360°, то

$$v_1 = 360^{\circ} + \varepsilon = nT + \varepsilon - 116'.8.$$

Отсюда

$$T = \frac{21600' + 116'.8}{790'.6} = T_0 + 0.005408\, T_0 = T_0 + 0^{д};1477.$$

Если не принимать въ соображеніе членовъ, зависящихъ отъ φ', то получится

$$T = T_0 + \frac{121'.8}{790'.6} = T_0 + 0{,}005408\, T_0 + 0.000232\, T_0 = T_0 + 0^{д}{,}1540.$$

Наконецъ, для зимнихъ мѣсяцевъ:

$$\varphi' = 27{,}32 \times \frac{d\varphi'}{dt} = 27{,}32\,.\,61' = 27^{\circ}.8,\ \xi = -\varphi' = 27^{\circ}.8,$$

$$2\xi - \varphi' = -83^{\circ}.4, \quad 2\xi - \varphi - \varphi' = -80^{\circ}.4,$$

и группа членовъ, зависящихъ отъ времени года составляетъ $-9'.5$.

Такимъ образомъ длина зимняго звѣзднаго мѣсяца, начинающагося съ перигея,

$$= T_0 + \frac{131'.3}{790'.6} = T_0 + 0.005408\, T_0 + 0.000631\, T_0 = T_0 + 0^{д}{,}166.$$

Итакъ, самый продолжительный звѣздный мѣсяцъ (зима, перигей) равняется

$$T_0 + 0^{д}.166 = 27^{д}.487 = 27^{д}11^{ч}40^{м}.$$

Относительный maximum

$$27^{д}.475 = 27^{д}11^{ч}24^{м}.$$

10. Разсмотримъ теперь движеніе Луны въ теченіе звѣзднаго мѣсяца, начинающагося совпаденіемъ новолунія съ апогеемъ.

Чтобы нагляднѣе выдѣлить неравенства, зависящія отъ мѣста Земли на ея орбитѣ, предположимъ, что разсматриваемый звѣздный мѣсяцъ начался около 4—5 января, когда Солнце бываетъ въ перигеліи.

---

*) Группа членовъ, зависящихъ отъ φ'.

Для конца мѣсяца:

$$\varphi = 177^\circ - 1^\circ.4 = 175^\circ.6,\ \varphi' = 27{,}32 \times 61' = 27^\circ.8,$$
$$\xi = -\varphi' = -27^\circ.8,\ 2\xi = -55^\circ.6,\ 2\xi - \varphi = 127^\circ.4,\ 2\xi + \varphi = 121^\circ.4,$$
$$2\xi - \varphi' = -83^\circ.4,\ 2\xi - \varphi - \varphi' = +99^\circ.6$$

и

$$v = nT + \varepsilon + 377'.3 \sin 4^\circ.4 - 12'.8 \sin 6^\circ + 76'.5 \sin 52^\circ.6 + \\ + 2'.9 \sin 58^\circ.6 - 39'.5 \sin 55^\circ.6 - 11'.2 \sin 27^\circ.8 + 1'.8 \sin 27^\circ.8 + 0 - \\ - 2'.3 \sin 83^\circ.4 + 3' \sin 80^\circ.4$$

или

$$v = nT + \varepsilon + 28'.94 - 1'.36 + 57'.9 + 2'.4 - 32'.5 - 5'.2 + 0'.8 + \\ + 0 - 2.2 + 2'.9 = nT + \varepsilon + 55'.38 - 3'.7\ ^{*)} = nT + \varepsilon + 51'.68.$$

Сравненіе съ долготой въ началѣ мѣсяца (ε) даетъ

$$360^\circ + \varepsilon = nT + \varepsilon + 51{,}7.$$

Отсюда

$$T = \frac{21600' - 51.7}{790'.6} = T_0 - 0.00239\, T_0 = \Gamma_0 - 0^{д}.0654$$

или

$$27^{д}7^{ч}43^{м}.2 - 1^{ч}34^{м}.8 = 27^{д}6^{ч}8^{м}.4.$$

Если не принимать въ соображеніе уклоненій, зависящихъ отъ мѣста Земли на ея орбитѣ, то получится

$$T = T_0 - 0.00257\, T_0 = 27^{д}.32 - 0^{д}.0702 = 27^{д}7^{ч}43^{м}.2 - 1^{ч}40.8 = \\ = 27^{д}.6^{ч}2^{м}.4 \text{ (относительный minimum)}.$$

Наконецъ, если предположить, что въ началѣ мѣсяца Солнце было въ афеліи (въ іюлѣ), то

$$T_{min} = T_0 - 0{,}00279\ \ T_0 = 27^{д}.321 - 0^{д}.076 = 27^{д}.7^{ч}43.^{м}2 - 1^{ч}50^{м} = \\ = 27^{д}5^{ч}53.^{м}2.$$

Примѣръ I. Звѣздный мѣсяцъ, начавшійся 14 января 1887 г. въ $1^{ч}27^{м}$ за $12^{ч}33^{м}$ до вступленія Луны въ апогей, продолжался $27^{д}6^{ч}9^{м}$.

Какъ видимъ, разница съ идеальнымъ случаемъ совершенно ничтожная.

Примѣръ II. Звѣздный мѣсяцъ 1—28 мая 1897 г. начался за $10^{ч}13.^{м}7$ до апогея. Онъ былъ равенъ $27^{д}5^{ч}58^{м}$.

11. Опредѣлимъ теперь варіаціи средней скорости въ теченіе самаго короткаго и самаго долгаго мѣсяца, не принимая во вниманіе мѣста Земли на ея орбитѣ. Мы имѣемъ

$$T_{max} = T_0\,(1 + 0{,}00605) \text{ и } T_{min} = T_0\,(1 - 0{,}00279),$$

---

*) Группа членовъ, зависящихъ только отъ φ'.

а такъ какъ

$$T \text{ вообще} = \frac{2\pi}{n \pm \Delta n}\text{, то } T_0\,(1 + 0{,}00605) = \frac{2\pi}{n - \Delta n_1}$$

и

$$T_0\,(1 - 0{,}00279) = \frac{2\pi}{n + \Delta n_2} \text{ откуда } \Delta n_1 = 0{,}00605\, n = 4'.78$$

и

$$\Delta n_2 = 0{,}00279\, n = 2.'2.$$

Итакъ средняя скорость въ теченіе самаго долгаго мѣсяца меньше нормальной на 4'.78, а средняя скорость въ короткій мѣсяцъ больше нормальной на 2'.2.

12. Какъ мы видѣли, положеніе Солнца въ его орбитѣ оказываетъ немалое вліяніе на продолжительность мѣсяца. Соотвѣтствующая часть $\frac{dv}{dt}$ выражается, какъ объяснено въ § 3, членами:

$$- 3m^2e'_1\, n \cos\varphi' - \frac{21}{8}\, m \,.\, \frac{a}{a'}\, n \cos\xi + me'n \cos(2\xi - \varphi') +$$

$$+ \frac{105}{16}\, mee'n \cos(2\xi - \varphi - \varphi'),$$

или въ числахъ:

$$- 0'.22 \cos\varphi' - 0'.4 \,.\, \cos\xi + 0'.8 \cos(2\xi - \varphi') + 0'.36 \cos(2\xi - \varphi - \varphi')\ldots$$

При прохожденіи Земли черезъ перигелій, т. е. въ началѣ января (напр. въ 1912 г. оно произошло 2-го января) $\varphi' = 0$, и слѣд. скорость меньше средней, а стало быть время обращенія Луны нѣсколько болѣе средняго. Лѣтомъ, наоборотъ, скорость больше, а мѣсяцъ короче. Параллактическое неравенство (съ аргументомъ ξ) caeteris paribus также отрицательно зимою и имѣетъ знакъ + въ лѣтніе мѣсяцы.

Такъ какъ

$$\xi = (nt + \varepsilon) - (n't + \varepsilon')$$

и безъ большей ошибки можно принять

$$nt + \varepsilon = \varphi + \omega \quad \text{и} \quad n't + \varepsilon' = \varphi' + \omega',$$

то

$$\xi = (\varphi - \varphi') + (\omega - \omega'),$$

и слѣдовательно при $\varphi' = 0$,

$$\cos\xi = \cos[\varphi + (\omega - \omega')],$$

а при $\varphi' = 180°$,

$$\cos\xi = - \cos[\varphi + \omega - \omega'].$$

Такимъ образомъ величина параллактическаго неравенства зависитъ и отъ времени года и отъ разстоянія перигелія отъ перигея. Движеніе ω за $^1/_2$ года равно почти 20°, такъ что зимой параллактическое

$$\text{неравенство} = - 0'.4 \cos(\varphi + \omega_0 - \omega'),$$

а лѣтомъ

$$+ 0'.4 \, cos \, (\varphi + \omega_0 - \omega' + 20^\circ) =$$

$$= 0'.4 \, cos \, (\varphi + \omega_0 - \omega') - 0'.4 \, . \, \frac{6.28}{18} \, . \, sin \, (\varphi + \omega_0 - \omega')$$

или

$$+ 0'.4 \, cos \, (\varphi + \omega_0 - \omega') - 0'.14 \, sin \, (\varphi + \omega_0 - \omega').$$

Такимъ образомъ разность между лѣтпимъ и зимпимъ значеніями нараллактическаго неравенства

$$+ 0'.8 \, cos \, (\varphi + \omega_0 - \omega') - 0'.14 \, sin \, (\varphi + \omega_0 - \omega')$$

Пренебрегая сравнительно незначительнымъ членомъ съ коэффиціентомъ 0'.14, заключаемъ, что отъ нараллактическаго неравенства скорость Луны зимою меньше средней на 0'.4, и почти па столько же больше средней лѣтомъ.

Принимая во вниманіе только годовое ур-ніе и параллактическое неравенство, имѣемъ:

$$T = \frac{2\pi}{n \pm 0'.22 \pm 0'.358} = \frac{2\pi}{n\left[1 \pm \frac{0'.22}{n} \pm \frac{0'.358}{n}\right]} =$$

$$= \frac{2\pi}{n} \, [1 \pm 0.00028 \pm 0.00045] = T_0 \pm 0^d.0076 \pm 0^d.0123$$

или

$$T = T_0 \mp 11^{м} \mp 17^{м}.7 \left(\begin{array}{l} - \text{ для іюля} \\ + \text{ для января} \end{array} \right).$$

Итакъ, отъ годового уравненія и параллактическаго неравенства мѣсяцъ короче лѣтомъ, чѣмъ зимой приблизительно на $57^{м}.4$.

Подобнымъ же образомъ находимъ для неравенствъ скорости въ зависимости отъ аргументовъ $(2\xi - \varphi')$ и $(2\xi - \varphi - \varphi')$:

a) Зимой при новолуніи и полнолуніи $0'.8 \, cos \, (2\xi - \varphi') = 0'.8$, а лѣтомъ — 0'.8.

b) Зимой въ новолуніи и perигеѣ $0'.36 \, cos \, (2\xi - \varphi - \varphi') = 0'.36$, а лѣтомъ при той же конъюнктурѣ.

$$0'.36 \, . \, cos \, (2\xi - \varphi - \varphi') = - \, 0'.36.$$

Примѣръ. Звѣздный мѣсяцъ 18 янв.—15 февр. 1912 г. продолжался $27^d 6^ч 26^м$.

Для начала мѣсяца $2\xi = 0$, $\varphi' = 16.^\circ 3$, $0'.8 \, . \, cos \, (2\xi - \varphi') = 0'.77$,

» конца » » » $\varphi' = 46^\circ$, $0.'8 \, . \, cos \, (2\xi - \varphi') = 0'.55$.

Въ среднемъ за мѣсяцъ скорость увеличилась противъ 790'.6 на 0'.66, слѣд. мѣсяцъ былъ короче средняго на $T_0 \, . \, \frac{0.'66}{790'6}$, или на $0^d.0228$ $(33^{м})$.

Сравнительно долгій звѣздный мѣсяцъ 14 іюля—10 августа 1912 г. увеличился еще отъ неравенства съ аргументомъ $2\xi - \varphi'$ на $35^{м}$.

Мы имѣемъ:

a) для начала мѣсяца: $\varphi_0' = 190^0.3$, $2\xi - \varphi'_0 = - 190^0.3$,
b) » конца » $\varphi_1' = 216^0$, $2\xi - \varphi'_1 = - 216^0$.

Среднее ариеметическое — $\frac{0'.8\ [cos\,(2\xi - \varphi_1') + cos\,(2\xi - \varphi_0')]}{2} = - 0'.72$,

слѣдовательно $\Delta\tau = + T_0\ \frac{0'.72}{790'.6} = 0^д.025$ или $35^м$.

Такимъ образомъ только отъ одной годовой варіаціи (аргументъ $2\xi - \varphi'$) іюльскій звѣздный мѣсяцъ можетъ сдѣлаться продолжительнѣе средняго на $35^м$, а январьскій короче на $33^м$, т. е. разница между іюльскимъ и январьскимъ звѣздными мѣсяцами отъ одного неравенства $2\xi - \varphi'$ можетъ быть больше часу.

ГЛАВА IV.

Неравенства синодическихъ мѣсяцевъ.

13. Когда извѣстна продолжительность звѣзднаго мѣсяца и средняя аномалія Солнца, опредѣленіе соотвѣтствующаго синодическаго мѣсяца уже не представляетъ никакихъ затрудненій.

Стоитъ только примѣнить формулы § 1.

Разсмотримъ отдѣльно два типа звѣздныхъ мѣсяцевъ.

I. Новолупіе—перигей.

I_a.	Абсол. maximum	$27^{д}.487$	или	$27^{c}11^{ч}40^{м}$ (зимой).
I_b.	Относ. »	$27^{д}.477$	»	$11^{ч}24^{м}$
I_c.	Перигей=новол.=афелію	$27^{д}.468$	»	$11^{ч}14.^{м}9$ (лѣтомъ).

II. Новолупіе—апогей.

II_a	Абсол. minimum	$27^{д}.245$	или	$27^{д}.5^{ч}53.^{м}2$ (лѣтомъ).
II_b.	Относ. »	$27^{д}.250$	»	$27^{д}.6_{ч}2.^{м}4$
III_c.	Апогей=новол.=периг.	$27^{д}.255$	»	$27^{д}.6^{ч}8.^{м}4$ (зимой).

Чѣмъ болѣе T, тѣмъ болѣе уголъ ψ_0, на который опережаетъ Земного Спутника въ теченіе мѣсяца Солнце, въ началѣ періода находившееся въ соединеніи съ нимъ и, caeteris paribus, тѣмъ больше скорость, съ которой Луна проходитъ дугу ψ, а стало быть тѣмъ короче соотвѣтствующій синодическій мѣсяцъ. Напримѣръ звѣздный мѣсяцъ 10 іюля—6-го августа 1877 г. продолжался $27\ 11^{ч}10^{м}$ (болѣе средняго на $3^{ч}23^{м}$), а дуга ψ для этого мѣсяца составляла $28^{0}8'.4$, короткій же звѣздный мѣсяцъ 14 янв.—10 февр. 1877 г., начавшійся съ апогея, продолжался только $27^{д}6^{ч}9^{м}$ и былъ, слѣдовательно, короче средняго на $1^{ч}24^{м}$, а дуга ψ для соотвѣтствующаго синодическаго мѣсяца равнялась $30^{0}17.'7$, т. е. болѣе средней на $1^{0}10'.7$.

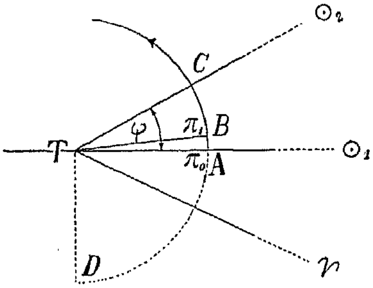
Допустимъ, что Луна, завершая свой звѣздный оборотъ, начатый отъ перигея, достигаетъ снова исходной точки своего движенія и, слѣдовательно, возвращается къ той же долготѣ черезъ T дней.

Точка A (см. черт. 2-й) на этотъ разъ однако уже не совпадаетъ съ перигеемъ, такъ какъ онъ въ теченіе мѣсяца ушелъ впередъ приблизительно на $3^{\circ}3'$ (дуга AB). Какъ извѣстно, среднее поступательное движеніе перигея составляетъ $40^{\circ}40'35''.58$ въ теченіе Юліанскаго года, или $0^{\circ}.1114$ въ одни сутки.

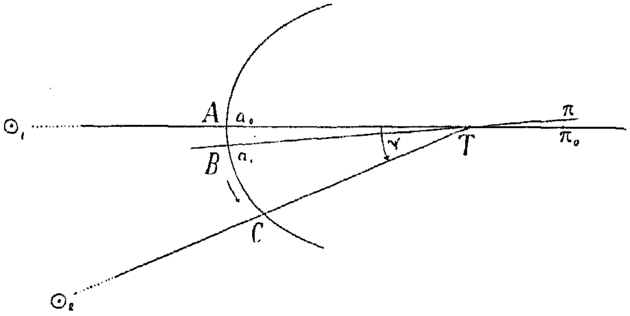
Чтобы достигнуть вторичнаго соединенія съ Солнцемъ, Земному Спутнику остается еще пройти по долготѣ около 29°. Тогда окончится синодическій мѣсяцъ.

Опредѣлимъ приблизительную скорость движенія Луны въ этотъ промежутокъ времени, когда она движется отъ точки A до вторичнаго новолунія.

Чтобы удобнѣе сравнивать величины $\frac{dv}{dt}$ при разныхъ значеніяхъ начальной аномаліи Луны и долготы перигея, выразимъ скорость въ функціи одного угла ξ.



Черт. 2.



Черт. 3.

Предположимъ, что ⊙ и ☾ находятся въ соединеніи, и опредѣлимъ въ общемъ случаѣ, черезъ сколько времени угловое разстояніе между ☾ и ⊙ будетъ равно данному углу ξ.

Разсуждая, какъ въ § 1, находимъ:

$$\tau = \frac{\xi}{n} + \frac{m\xi}{n} + \frac{m^2\xi}{n} + \ldots$$

Въ самомъ дѣлѣ: черезъ τ единицъ времени (положимъ среднихъ сутокъ) Луна пройдетъ дугу $\xi\,(1 + m + m^2)$, а Солнце въ то же время $\xi\,(m+m^2)$; угловое разстояніе между ними будетъ слѣдовательно

$$\xi\,(1 + m + m^2) - \xi\,(m + m^2) = \xi.$$

Если f истинная аномалія Луны, а φ—средняя, то можно принять:

$$\varphi = \xi\,(1 + m + m^2) = \frac{\xi}{1-m}\,,$$

и

$$f = \varphi + 2\,e\,sin\,f = \frac{\xi}{1-m} + 2\,e\,sin\left(\frac{\xi}{1-m}\right).$$

Въ выраженіе средней аномаліи вводимъ еще вмѣсто n величину cn или $n\left(1-\frac{3}{2}m^2\right)$; такимъ образомъ *) получаемъ:

$$\varphi = \xi\left(1+m-\frac{1}{2}m^2\right),\quad 2\varphi = 2\xi\left(1+m-\frac{1}{2}m^2\right).$$

и

$$\frac{dv}{dt} = n + \alpha' \cos\left[\xi\left(1+m-\frac{1}{2}m^2\right)\right] + \beta' \cos\left[2\xi\left(1+m-\frac{1}{2}m^2\right)\right] +$$

$$+ \gamma' \cos\left[\xi - \xi\left(m-\frac{1}{2}m^2\right)\right] + \delta' \cos 2\xi \,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad (A)$$

14. Примѣнимъ теперь эту формулу къ обоимъ главнымъ случаямъ: 1) новолуніе совпадаетъ съ перигеемъ и 2) новолуніе совпадаетъ съ апогеемъ (черт. 3). Для упрощенія послѣдующихъ соображеній допустимъ еще, что въ обоихъ случаяхъ начальная долгота Луны равняется 0, т. е. $\omega_1 = 0$ и $\omega_2 = 180^0$.

Мы находимъ измѣненіе средней скорости или варіацію δn, интегрируя періодическую часть между предѣлами 0 и T и дѣля результатъ на T_0 или на 27,32.

Такъ какъ

$$\frac{d\xi}{dt} = n\,(1-m),$$

то

$$T_0\delta n = \int_0^T \frac{dv}{dt}\,dt = \int_0^T \frac{dv}{d\xi}\cdot\frac{d\xi}{n\,(1-m)}\,.$$

Подстановка даетъ:

$$T_0\delta n = \frac{\alpha'}{n\,(1-m)}\int_0^T \cos\left[\xi + \xi m - \xi\,.\,\frac{1}{2}m^2\right]d\xi +$$

$$+ \frac{\beta'}{n\,(1-m)}\int_0^T \cos\,[2\xi + 2m\xi - m^2\xi]\,d\xi +$$

$$+ \frac{\gamma'}{n\,(1-m)}\int_0^T \cos\left[\xi - m\xi + \frac{1}{2}m^2\xi\right]d\xi +$$

$$+ \frac{\delta'}{n\,(1-m)}\int_0^T \cos 2\xi\,d\xi =$$

---

*) Вмѣсто $\xi\,(1+m+m^2)$ беремъ $\xi\left(1+m+m^2-\frac{3}{2}m^2\right)$.

$$= \frac{\alpha'}{n\,(1-m)\left(1+m-\frac{1}{2}\,m^2\right)}\,sin\left(\xi+m\xi-\frac{1}{2}\,m^2\xi\right)+$$

$$+\frac{\beta'}{2n\,(1-m)\left(1+m-\frac{1}{2}\,m^2\right)}\,sin\,(2\xi+2m\xi-m^2\xi)+$$

$$+\frac{\gamma'}{n\,(1-m)\left(1-m+\frac{1}{2}\,m^2\right)}\,sin\left(\xi-m\xi+\frac{1}{2}\,m^2\xi\right)+$$

$$+\frac{\delta'}{2n\,(1-m)}\,sin\,2\xi.$$

Въ началѣ звѣзднаго мѣсяца, считаемаго какъ обыкновенно, съ поволунія, $\xi = 0$ и $\frac{dv}{dt} = n + \alpha' + \beta' + \gamma' + \delta'$, независимо отъ того, въ какой точкѣ своей орбиты находится Луна при начальномъ соединеніи съ Солнцемъ.

Когда Луна возвратится по истеченіи мѣсяца къ той-же долготѣ (0), Солнце будетъ впереди ея приблизительно на 27^0, слѣд. $\xi = -27^0$ или $+333^0$, и въ 1-мъ случаѣ (● π), если введемъ въ выраженіе средней аномаліи поправку, зависящую отъ

$$\Delta\omega = -\frac{9}{32}\cdot\frac{m^2}{e}\cdot sin\,2\xi \ ^{*)},$$

то получится

$$sin\left(\xi+m\xi-\frac{1}{2}\,m^2\xi-\frac{3}{4}\,m^2\xi\right) = sin\,(333^0+0{,}072\,.\,333^0-1^0.\,4)$$

$$\varphi = \xi+m\xi-\frac{1}{2}\,m^2\xi-\frac{3}{4}\,m^2\xi = sin\,(333^0+24^0-1^0.\,4) =$$

$$= +\,sin\,355^0.\,6 = -\,sin\,4^0.\,4,\quad sin\left(2\xi+2m\xi-\frac{5}{2}\,m^2\xi\right) = -\,sin\,8^0.\,8$$

$$sin\left(\xi-m\xi+\frac{1}{2}\,m^2\xi\right) = sin\,(333^0-24^0) = -\,sin\,51^0$$

$$sin\,2\xi = -\,sin\,54^0.$$

Итакъ,

$$T_0\,.\,\delta n_1 = -\frac{\alpha'}{n\left(1-\frac{5}{4}\,m^2\right)}\,sin\,4^0.\,4-\frac{\beta'}{2n\left(1-\frac{5}{4}\,m^2\right)}\,sin\,8^0.\,8-$$

$$-\frac{\gamma'}{n\left(1-2m+\frac{3}{2}\,m^2\right)}\,sin\,51^0-\frac{\delta'}{2n\,(1-m)}\,sin\,54^0.$$

---

*) См. § 8.

Замѣчая, что $T_0 \cdot n = 2\pi$, имѣемъ:

$$\delta n_1 = \frac{86'.8}{2\pi \,.\, 0{,}9873} \sin 4^0.4 - \frac{6'}{2\pi \,.\, 1{,}9746} \sin 8^0.8 - \frac{17'.4}{2\pi \,.\, 0{,}8588} \sin 51^0 -$$
$$- \frac{18'.2}{2\pi \,.\, 1{,}985} \sin 54^0 = - 1'.07 - 0.06 - 2'.40 - 1'.18 = 4'.81.$$

Итакъ въ теченіе разсматриваемаго мѣсяца скорость уменьшилась въ среднемъ на $4'.8$. Отсюда заключаемъ, что самъ мѣсяцъ былъ продолжительнѣе средняго; увеличеніе

$$\delta T = \frac{T_0 \,.\, 4'{,}81}{n} = 0^d.166,$$

согласно съ результатомъ, найденнымъ другимъ путемъ въ § 9. Точно также получимъ $\delta T = +2'.0$ по формулѣ (A) и во 2-мъ случаѣ, т. е. для звѣзднаго мѣсяца, начинающагося съ апогея.

Замѣчая, что коэффиціенты періодическихъ членовъ въ выраженіи $\frac{dv}{dt}$ равняются соотвѣтственнымъ коэффиціентамъ въ выраженіи истинной долготы, умноженнымъ на n въ частяхъ радіуса, т. е. на $\frac{2\pi}{T_0}$, мы имѣемъ:

$$\delta n = \frac{1}{T_0} \cdot \frac{1}{n\,(1-m)} \cdot \frac{\Delta v \,.\, 2\pi}{T_0} = \frac{\Delta v \,.\, 2\pi}{T_0^{\,2} n\,(1-m)}.$$

Но $T_0 n = 2\pi$, слѣдовательно по сокращеніи получается:

$$\delta n = \frac{|\Delta v|_0^T}{T_0\,(1-m)},$$

гдѣ Δv приращеніе долготы Луны, или, точнѣе — долготы эпохи, т. е. элемента ε, ибо по условію задачи долгота Луны осталась та-же.

Итакъ

$$\delta n = \frac{\Delta \varepsilon}{T_0\,(1-m)}.$$

Теперь намъ остается вычислить величины n_1 и m_2 для обоихъ частныхъ случаевъ.

Предположимъ, что Луна, начавъ движеніе отъ перигея, возвратилась къ той-же точкѣ относительно звѣздъ. По предъидущему имѣемъ для конца звѣзднаго мѣсяца

$$\varphi = 355^0.6, \quad 2\xi = -59^0,$$

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_1 = 790^0.6 + 86'.5 + 14'.1 + 9'.6 + 5'.8 = 906'.6.$$

Мы здѣсь брали φ равное средней величинѣ, не принимая въ разсчетъ измѣненія φ отъ періодическихъ неравенствъ долготы перигея; это не уменьшаетъ точности вычисленій, такъ какъ періодическіе члены эвекціи и варіаціи представляютъ собою, именно тѣ неравенства скорости, которыя зависятъ отъ движенія перигея. Другое дѣло, если вычислять $\frac{dv}{dt}$ для конца даннаго синодическаго мѣсяца.

Такъ какъ начало синодическаго мѣсяца уже относится къ другому звѣздному и аномалистическому обороту, то здѣсь необходимо или припять во вниманіе измѣненіе долготы эпохи или вычислить болѣе точную величину φ.

Пользуясь формулами § 4 и замѣчая, что для конца звѣзднаго мѣсяца

$$2\xi - 2\varphi = -49^{0}.8 \text{ и } 2\xi - \varphi = -54^{0}.6$$

получимъ

$$\Delta\omega = 10^{0}.2 + 10^{0}.6 = 20^{0}.8.$$

Итакъ къ концу мѣсяца перигей оказывается впереди на $20^{0}.8$, независимо отъ принятаго уже во вниманіе перемѣщенія на $3^{0}3'$.

Итакъ φ, для конца даннаго синодическаго мѣсяца равняется

$$355^{0}.6 + 29^{0} - 20^{0}.8 = 3^{0}.8, \quad \xi = 0, \quad 2\xi - \varphi = -3^{0}.8 \text{ и пр.},$$

такъ что

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_1 = 790'.6 + 86'.6 + 17'.3 + 18'.2 + 5'.8 = 918'.5,$$

и

$$n_2 = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{dv}{dt}\right)_1 + \left(\frac{dv}{dt}\right)_2\right] = 912'.4.$$

Такимъ-же путемъ получимъ для конца звѣзднаго мѣсяца, начавшагося совпаденіемъ новолунія съ апогеемъ:

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_1 = 790'.6 - 86'.5 - 14'.2 + 9'.35 + 5'.9 = 705',$$

и для конца синодическаго мѣсяца

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_2 = 790'.6 - 78'.7 - 15'.7 + 18'.2 + 3'.2 = 717'.6.$$

Среднее ариометическое $= + 711'.3$.

Итакъ въ промежуткѣ времени между окончаніемъ звѣзднаго мѣсяца и началомъ слѣдующаго синодическаго Луна движется въ 1-мъ случаѣ со средней скоростью $912'.4$, а во 2-мъ—со скоростью $711'.3$.

Отсюда m_2 для зимнихъ мѣсяцевъ $= \frac{61.1}{912.4}$ или $\frac{61.1}{711'.3}$, а для лѣтнихъ $\frac{57.3}{912.4}$ или $\frac{57.3}{711'.3}$, смотря по тому, съ какой точки орбиты начинался данный синодическій мѣсяцъ, отъ перигея или отъ апогея.

Теперь у насъ есть всѣ данныя для вычисленія синодическихъ мѣсяцевъ, соотвѣтствующихъ 6 типамъ звѣздныхъ обращеній

Начало мѣсяца совпадаетъ съ перигеемъ.	Ср. ск. въ теченіе зв. м. (n).	Ср. ск. ⊙ n_1.	Ср. ск. Луны въ теч. вр. τ (n_2).	Величины T.	ψ_0.	$lg\, m_1$.	$(m_1+m_1^2+m_1^3)$.	$T(m_1+m_2^2+\ldots)$.	Σ.	Σ въ дняхъ и часахъ.
I. ⊙ въ перигеліи (зима).	785.22	61.05	912′.4	$27^д.487$	27°58′.1	8.82550	0.0717	$1^д.9708$	29.4578=	$29^д 10^ч 59^м.2$
II. Среднее положеніе ⊙	785.54	59. 1		$27^д.477$	27° 3′.9	8.81140	0.0693	$1^д.9040$	29.3790	$9^ч 5^м.8$
III. ⊙ въ афеліи (лѣто)	785.86	57. 5		$27^д.468$	26°13′.9	8.79796	0.0670	$1^д.8403$	29.3083	$7^ч 23^м.9$
Среднія велич.	790. 6	59. 1	787′	$27^д.3217$	26°55′.7				29.5306	$29^д 12^ч 44^м.3$
Начало мѣсяца совпадаетъ съ апогеемъ.										
IV. ⊙ въ афеліи (лѣто)	792. 2	57. 3	711′.3	$27^д.245$	26° 1′.1	8.90610	0.0876	$2^д.3867$	29.632	$29^д 15^ч 10^м.1$
V. Среднее положеніе ⊙	792. 0	59. 1		$27^д.250$	26°50′.6	8.91954	0.0906	$2^д.4689$	29.719	$29^д 17^ч 15^м.4$
VI. ⊙ въ перигеліи (зима)	791. 8	61.05		$27^д.255$	27°44′.	8.93364	0.0938	$2^д.5563$	29.811	$29^д 19^ч 27^м.8$

Итакъ самый продолжительный синодическій мѣсяцъ ($29^д 19^ч 27^м.8$) соотвѣтствуетъ январю и тому положенію линіи апсидъ, которое характеризуется равенствомъ $\omega = \odot + 180$ въ началѣ мѣсяца. Наоборотъ, самый краткій синодическій мѣсяцъ ($29^д 7^ч 23^м.9$) можетъ быть наблюдаемъ только въ іюлѣ и при томъ при совпаденіи въ началѣ мѣсяца луннаго перигея съ Солнцемъ, т. е. при условіи $\omega = \odot$.

Вообще, чѣмъ короче звѣздный мѣсяцъ, тѣмъ больше синодическій.

Примѣръ I. Синодическій мѣсяцъ іюль — августъ 1877 г. начался 10 іюля въ $10^ч 6^м$, передъ вступленіемъ Луны въ перигей, и окончился 8 августа въ $17^ч.17^м$ за $5^1/_2$ часовъ до вторичнаго достиженія перигея. Продолжительность этого мѣсяца $29^д 7^ч.1$.

Примѣръ П. Синодическій мѣсяцъ январь—февраль 1877 г. начался съ новолунія 14 января въ $1^ч.27^м$, когда Луна приближалась къ апогею, и окончился 12 февраля въ $20^ч 58^м.6$. Продолжался онъ $29^д 19^ч.5$ или $29^д 19^ч 31^м.6$.

15. Изъ предъидущаго заключаемъ:

1) Самый продолжительный синодическій мѣсяцъ бываетъ, когда *полнолуніе совпадаетъ съ моментомъ прохожденія Луны черезъ перигей.* Тогда и разстояніе Луны отъ Земли въ противостояніи наименьшее, слѣдовательно видимый діаметръ Луны maximum. Итакъ, чѣмъ больше кажется Луна въ моментъ полнолунія, тѣмъ больше соотвѣтствующій мѣсяцъ.

Наоборотъ, когда перигей совпадаетъ съ новолуніемъ, синодическій мѣсяцъ оказывается самымъ краткимъ.

Онъ меньше средняго почти на 7^ч.

2) Увеличеніе періода синодическаго обращенія абсолютно больше, чѣмъ уменьшеніе его въ кратчайшій мѣсяцъ. Это зависитъ отъ того, что члены, зависящіе отъ варіаціи и отъ 2φ въ обоихъ случаяхъ, т. е. при $\omega = \odot$ и при $\varphi = \odot - 180^\circ$ положительны. Отъ нихъ скорость почти одинаково увеличивается и въ кратчайшій и въ самый продолжительный мѣсяцъ.

2) Если кратчайшій мѣсяцъ равенъ $\Sigma_0 - \alpha$, а длиннѣйшій $\Sigma_0 + (\alpha + \beta)$, то очевидно, число краткихъ мѣсяцевъ въ данномъ рядѣ лѣтъ больше, чѣмъ число самыхъ продолжительныхъ. Пусть въ данномъ числѣ M мѣсяцевъ m — самыхъ короткихъ, n — самыхъ длинныхъ и p среднихъ.

Тогда

$$m + n + p = M, \quad \alpha = 5{,}6, \quad \beta = 1.2,$$

$$\Sigma_0 = \frac{m\,(\Sigma_0 - 5.6) + p\Sigma_0 + n\,(\Sigma_0 + 6.8)}{m + n + p} =$$

$$= \frac{M\Sigma_0 + n\,.\,6{,}8 - m\,.\,5{,}6}{M}.$$

Такъ какъ отсюда слѣдуетъ, что $n\,.\,5{,}6 = m\,.\,6{,}8$, то,

$$m = \frac{6{,}8}{5{,}6}\,n = \frac{8}{7}\,n = 1{,}143.$$

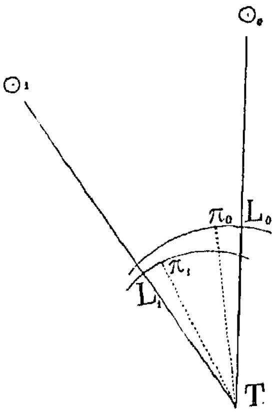
Стало быть на m короткихъ мѣсяцевъ приходится вообще только $\frac{7}{8}\,m$ долгихъ.

4) Самый краткій мѣсяцъ соотвѣтствуетъ тому положенію линіи апсидъ, когда перигей обращенъ къ Солнцу въ новолуніе, т. е. когда $\odot - \omega = 0$, а такъ какъ короткихъ мѣсяцевъ больше, чѣмъ долгихъ, то это положеніе линіи апсидъ надо считать наиболѣе устойчивымъ, т. е. къ нему линія апсидъ возвращается скорѣе и чаще, чѣмъ къ положенію, характеризуемому формулою $\omega = \odot + 180^\circ$.

Это зависитъ отъ того, что въ апогеѣ неріодическое движеніе линіи апсидъ значительно меньше, чѣмъ въ перигеѣ. Около перигея линія апсидъ далеко уходитъ впередъ, и потому если въ данный моментъ перигей совпадаетъ съ точкой новолунія, то и при наступленіи слѣдующаго новолунія Луна будетъ находиться сравнительно близко отъ перигея. Стало-быть опять будетъ краткій синодическій мѣсяцъ.

Примѣръ. Въ маѣ 1911 г. [новолуніе происходило за 11 часовъ до перигея (● 27 мая 18^{ч}24^м.4, π 28 мая 5^ч.4), и начавшійся 27 мая синодическій мѣсяцъ равнялся $29^d6^h55^m.3$. Въ слѣдующій моментъ Луна проходила черезъ перигей 25 іюля въ 15^h. — ранѣе наступленія новолунія на $10^h.2$, значитъ перигей за истекшій мѣсяцъ значительно ушелъ впередъ.

Пусть π_0 его мѣсто 28 мая 1911 г. Угловое разстояніе $L_0\pi_0 = 7^\circ$ (см. черт. 4). Черезъ мѣсяцъ (синодическій) разстояніе перигея отъ новолунія будетъ почти тоже въ обратную сторону, а такъ какъ Солнце ушло впередъ приблизительно на 27°, то періодическое + постоянное движеніе перигея $\pi_0\pi$ равняется $27^\circ - 14^\circ = 13^\circ$, и новый синодическій мѣсяцъ начинается почти при той-же конъюнктурѣ Луны, Солнца и перигея. Слѣдуетъ ожидать, что онъ будетъ мало отличаться отъ предшествовавшаго. Дѣйствительно мѣсяцъ 27 мая — 26 іюня равняется $29^d6^h55^m.3$, синодическій мѣсяцъ 26 іюня—25 іюля—$29^d6^h52^m.3$.



Черт. 4.

Краткому синодическому мѣсяцу соотвѣтствуетъ въ данномъ случаѣ и непродолжительный аномалистическій мѣсяцъ, ибо перигей быстро идетъ на встрѣчу Лунѣ и достигается ею раньше обыкновеннаго.

5) Отъ положенія линіи апсидъ относительно линіи соединеній зависитъ бо́льшее или меньшее сжатіе Лунной орбиты, т. е. увеличеніе или уменьшеніе e, а измѣненіе эксцентрицитета неизбѣжно сопровождается увеличеніемъ или уменьшеніемъ соотвѣтствующаго синодическаго мѣсяца. Когда линія соединеній перпендикулярна къ линіи апсидъ, измѣненія величины e не вызываютъ столь значительныхъ удлиненій и сокращеній въ величинѣ синодическаго мѣсяца, потому-что въ этомъ случаѣ Луна настолько-же приближается къ $\odot$ въ одной половинѣ пути, на сколько она удаляется отъ него въ другой. Въ этомъ положеніи линіи апсидъ синодическіе мѣсяцы ровнѣе, амплитуды ихъ колебаній гораздо меньше, чѣмъ при $\omega = \odot$ или при $\omega = \odot + 180^\circ$.

Обѣ половины пути болѣе или менѣе симметричны относительно линіи соединеній. Кромѣ того, когда линія соединенія (л. с.) перпендикулярна къ линіи апсидъ (л. а.), эксцентрицитетъ лунной орбиты оказывается минимальнымъ, т. е. путь Земнаго Спутника приближается по своей формѣ къ кругу, и движеніе Луны становится вообще болѣе равномѣрнымъ.

ГЛАВА V.

Аномалистическіе мѣсяцы и движеніе перигея.

16. Среднее суточное движеніе линіи апсидъ въ минутахъ дуги равняется $\frac{360.60}{C}$, гдѣ C періодъ обращенія перигея или 3232,575 ср. с. Отсюда средняя скорость движенія перигея $6',68$.

Подобно тому, какъ изъ средняго звѣзднаго мѣсяца получаемъ средній синодическій путемъ умноженія T_0 на

$$(1 + m + m^2),$$

такъ изъ T_0 получаемъ A_0, умножая T_0 на

$$(1 + \alpha + \alpha^2 \ldots),$$

гдѣ

$$\alpha = \frac{6',68}{790'.6}.$$

Итакъ

$$A_0 = T_0 (1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots) = 27^{д}.5546 = 27^{д}13^{ч}18^{м}.6.$$

Періодическое движеніе перигея столь значительно и неравномѣрно, что амплитуда колебаній аномалистическаго мѣсяца превышаетъ $3^{д}21^{ч}$ или $0,141\,A_0$ $\left(\text{около } \frac{1}{7} A_0\right)$, причемъ самый продолжительный аномалистическій мѣсяцъ можетъ доходить до $28^{д}13^{ч}.3$ (т. е. больше средняго на 1 сутки), а самый короткій до $24^{д}16^{ч}$ (меньше средняго на 2 с. $21^{ч}$).

Абсолютная величина уменьшенія, какъ видимъ, гораздо значительнѣе максимальнаго увеличенія, слѣдовательно при счетѣ мѣсяцевъ отъ перигея до перигея, очевидно, въ данномъ числѣ лѣтъ окажется короткихъ аномалистическихъ мѣсяцевъ больше, чѣмъ продолжительныхъ. Это значитъ, что поступательное движеніе линіи апсидъ около перигея вообще больше средняго, но чаще наблюдаются небольшія отступленія перигея, чѣмъ крупное его поступательное движеніе.

Выражая долготу Луны посредствомъ формулъ «классической» теоріи, въ которыхъ независимымъ перемѣннымъ является время, мы можемъ по извѣстнымъ пріемамъ замѣнить главные, послѣ эллиптическаго неравенства періодическіе члены v, т. е. эвекцію и варіацію прибавками Δe, $\Delta\omega$ и $\Delta\varepsilon$ вводимыми въ выраженіе $\varepsilon + 2e \sin \varphi$.

Такимъ образомъ можно принять для возмущеннаго движенія:

$$v = nt + \varepsilon_1 + 2e \sin \varphi_1.$$

17. Въ перигеѣ $\varphi = 0$, слѣдовательно

$$v = nt + \varepsilon_1 + 2e_1 \sin \varphi_1, \text{ гдѣ сумма } \varepsilon_1 + 2e_1 \sin \varphi_1$$

заключаетъ въ себѣ всѣ члены, зависящіе отъ обоихъ главныхъ неравенствъ долготы и параллакса.

Такъ какъ $2e_1 \sin \varphi_1$ вообще равно $2e_1 \sin \varphi - 2e_1 \cos \varphi \,.\, (\Delta\omega - \Delta\varepsilon)$, то въ перигеѣ, когда $\varphi = 0$,

$$v = nt + \varepsilon_1 - 2e_1 (\Delta\omega - \Delta\varepsilon).$$

Подставляя сюда вмѣсто

$$\Delta\omega \ldots - \left(\frac{15}{8} m + \ldots\right) \sin (2\xi - 2\varphi) - \frac{9}{4} \frac{m^2}{e} \sin (2\xi - \varphi) +$$
$$+ \frac{1}{4} \frac{m^2}{e} \,.\, \sin (2\xi + \varphi),$$

вмѣсто $e \ldots e + \Delta e$, гдѣ Δe варіація эксцентрицитета (формула 7, § 3) а вмѣсто ε_1

$$\varepsilon_0 - 3m^2 \sin 2\xi \text{ *)},$$

находимъ:

$$v = nt + \varepsilon_0 + \left(\frac{15}{4} me + \ldots\right) \sin 2\xi +$$
$$+ \frac{9}{2} m^2 \sin 2\xi - \frac{1}{2} m^2 \sin 2\xi - 3m^2 \sin 2\xi$$

или

$$v = nt + \varepsilon_0 + \left(\frac{15}{4} me + \ldots\right) \sin 2\xi + m^2 \sin 2\xi.$$

Отсюда слѣдуетъ, что положивъ $\left(\frac{15}{4} me + \ldots\right) \sin 2\xi - \frac{9}{4} \cdot \frac{m^2}{e} \sin 2\xi + \ldots = 2e_1 \sin \varphi_1 - 3m^2 \sin 2\xi$, гдѣ $\varphi_1 = \Delta\varepsilon - \Delta\omega$ можно принять для точки перигея

$$v = nt_1 + \varepsilon_1 + 2e_1 \sin \varphi_1$$

гдѣ t_1 — число среднихъ солнечныхъ сутокъ, протекшихъ съ момента перигея, предшествовавшаго данному, когда имѣло мѣсто равенство

$$nt_0 + \varepsilon_0 - \omega_0 = 0,$$

или просто $\varepsilon_0 = \omega_0$, если считать время t именно съ этого момента.

---

*) См. § 3.

Очевидно t_1 въ формулѣ $v = nt_1 + \varepsilon_1$ должно удовлетворить уравненію

$$nt_1 + \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon - \omega_0 - \Delta\omega = 0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (16)$$

ибо именно этой величинѣ равняется аргументъ главнаго эллиптическаго неравенства ($2e\,sin\,\varphi$) въ моментъ наступленія перигея.

Подобнымъ-же образомъ мы нашли-бы$\Delta\varepsilon$ и $\Delta\omega$ и для апогея, но это пока намъ ненужно.

Пусть

$$nt_1 = 360^\circ \pm n\tau.$$

Мы имѣемъ:

$$\pm n\tau + \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon - \omega_0 - \Delta\omega = 0$$

или

$$\pm n\tau + \Delta\varepsilon - \Delta\omega = 0,$$

откуда

$$\tau = \pm \frac{\Delta\omega - \Delta\varepsilon}{n}.$$

Итакъ продолжительность аномалистическаго мѣсяца въ среднихъ суткахъ

$$A = T \pm \frac{\int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{d\omega}{dt}\,dt - \int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{d\varepsilon}{dt}\,dt}{n} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (17)$$

Здѣсь $\int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{d\omega}{dt}\,dt$ выражаетъ полную величину варіаціи ω, т. е. перемѣщеніе, пропорціональное времени $+$ періодическое движеніе, а n—среднюю скорость.

Остается вывести окончательныя формулы для опредѣленія

$$\int \frac{d\omega}{dt}\,dt \ \ \Delta e \text{ и } \Delta\varepsilon.$$

18. Мы нашли $\Delta\varepsilon$ въ первомъ приближеніи $= - 3m^2\,sin\,2\xi$. Отъ послѣдующихъ членовъ варіаціи $\Delta\varepsilon$ возрастаетъ до $-4{,}5m^2\,sin\,2\xi$ или до $-1^\circ.44\,sin\,2\xi$.

Что касается до Δe, то изъ главныхъ членовъ эвекціи и варіаціи имѣемъ до момента прохожденія черезъ перигей (см. § 3);

$$\Delta e = \left(\frac{15}{8}\,me + \frac{5}{2}\,m^2\right) cos\ 2\xi\,.$$

съ прибавками, зависящими отъ послѣдующихъ приближеній:

$$\Delta e = \left(\frac{42{,}7}{16}\,me + \frac{30}{8}\,m^2\right) cos\ 2\xi = (0.2e + 0.344e)\,cos\,2\xi \ . \ . \ \ (18)$$

Для удобства послѣдующихъ соображеній выразимъ еще одною аналитическою формулой сумму членовъ эвекціи и варіаціи въ моментъ перигея.

Изъ общаго выраженія должны (см. § 61 Т. дв. Б.) легке находимъ съ небольшими округленіями:

$$\text{дв.} + \text{вар.} = \left|\frac{15}{4} me + 6 \, . \left(\frac{15}{8}\right)^2 m^2 e\right\} \, sin\, 2\xi + 2m^2 sin\ 2\xi.$$

Коэффиціенты $\frac{15}{4}\, me + \ldots$ и $2m^2$ представляютъ собою точное (до величинъ порядка m^5) аналитическое выраженіе въ частяхъ радіуса числовыхъ величинъ $4587''$ *) и $2371''$, т. е. коэффиціентовъ эвекціи и варіаціи по долготѣ.

Это значитъ, что

$$\left\{\frac{15}{4}\, me + 6 \, . \left(\frac{15}{8}\right)^2 m^2 e\right\} \frac{1296000}{2\pi} = 4587''$$

и

$$\text{и } 2m^2 . \frac{1296000}{2\pi} = 2371''.$$

Замѣчая, что

$$6 \, . \left(\frac{15}{8}\right)^2 m^2 e : \frac{15}{8}\, me = \frac{45 \, . \, 0{,}0748}{8} = 0.4208$$

и

$$\frac{15}{4}\, me = \frac{15}{4} \, . \, m^2 \, . \, \frac{e}{m} = \frac{15}{4}\, m^2 \, . \, 0{,}734,$$

находимъ:

$$\Sigma\varepsilon = \left\{\frac{15}{4}\, m^2 \, \{0.734 + 0.309\} + 2m^2\right\} sin\, 2\xi.$$

или въ градусахъ

$$\Sigma = \frac{71}{12} \, . \, m^2 \, . \, \frac{360}{2\pi}\, sin\ 2\xi \ (\text{почти } 6m^2\, \frac{360}{2\pi}\, sin\, 2\xi \text{ или } 1^\circ.92\, sin\, 2\xi) \ . \ . \ (19)$$

19. Чтобы вычислить точныя величины варіацій $\Delta\omega$, зависящихъ главнымъ образомъ, конечно, отъ членовъ эвекціи и варіаціи, намъ пришлось бы подвергнуть подробному разбору коэффиціенты при $sin\ (2\xi - \varphi)$ и $sin\ 2\xi$, подобно тому, какъ это сдѣлано, напримѣръ, относительно 1-го члена варіаціи § 22 Т. Дв. Луны.

Кромѣ того, нужно бы принять въ соображеніе и многіе изъ остальныхъ членовъ v, напримѣръ, съ аргументомъ $2\xi - \varphi'$, $(2\xi - \varphi' - \varphi)$ и т. д.

Это сложное и утомительное вычисленіе выходитъ однако изъ предѣловъ нашего изслѣдованія и должно быть оставлено до другого раза, тѣмъ болѣе, что и достигнутое нами приближеніе даетъ болѣе или менѣе удовлетворительные результаты въ примѣненіи къ вычисленіямъ $\Delta\omega$ и A,

---

*) Согласно Понтекулану.

т.-е. 1) разности между средней и истинной долготой перигея и 2) продолжительности аномалистическаго мѣсяца.

Нѣкоторыя исправленія въ коэффиціентахъ при $sin\,(2\xi - \varphi)$ и $sin\,(2\xi + \varphi)$ все-таки могутъ быть введены безъ риска большой ошибки, путемъ сравненія главныхъ членовъ варіаціи по долготѣ съ послѣдующими, зависящими отъ m^3, m^4 и пр.

Изъ главнаго члена варіаціи мы получили для $\Delta\omega$

$$\ldots - \frac{9}{4}\,\frac{m^2}{e}\,.\,sin\,(2\xi - \varphi) + \frac{1}{4}\cdot\frac{m^2}{e}\,sin\,(2\xi + \varphi).$$

Если принять во вниманіе въ выраженіяхъ $\frac{1}{r}$ и v члены вида

$$(Am^3 + Am^4 + \ldots)\,cos\,2\xi \text{ и } (Bm^3 + Bm^4 + \ldots)\,sin\,2\xi,$$

то коэффиціенты

$$-\frac{9}{4} \text{ и } +\frac{1}{4}$$

въ $\Delta\omega$ увеличатся въ отношеніи $3:2$ (обычный въ теоріи Луны множитель для полученія послѣдующихъ приближеній), такъ что вмѣсто

$$-\frac{9}{4}\,.\,\frac{m^2}{e} \text{ и } +\frac{1}{4}\,.\,\frac{m^2}{e}$$

получимъ соотвѣтственно:

$$-\left(\frac{9}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{9}{4}\right)\frac{m^2}{e}$$

и

$$+\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\right)\frac{m^2}{e}$$

съ точностью до величинъ порядка m^5.

Такимъ образомъ исправленная величина $\Delta\omega$ получаетъ видъ

$$\Delta\omega = -\left\{\frac{15}{8}\,m + 3\left(\frac{15}{8}\right)^2 m^2\right\} sin\,(2\xi - 2\varphi) - \frac{3{,}4m^2}{e}\,.\,sin\,(2\xi - \varphi)$$

$$+\frac{3}{8}\,\frac{m^2}{e}\,sin\,(2\xi + \varphi)$$

или въ градусахъ:

$$\Delta\omega = -11^\circ.44\,sin(2\xi - 2\varphi) - 19^\circ.72\mu.sin(2\xi - \varphi) + 2^\circ.19\mu.sin(2\xi + \varphi)\ .\ (20)$$

Въ этой формулѣ μ означаетъ множителя, зависящаго отъ Δe. Въ приложеніяхъ ея, какъ увидимъ ниже, почти всегда можно принимать $\mu = 1$.

Замѣтимъ, что главный членъ эвекціи не даетъ членовъ, зависящихъ отъ аргумента 2ξ. Это объясняется тѣмъ, что изъ интеграла

$$\frac{1}{r^2}\int Tr\,dt$$

въ выраженіи $\frac{dv}{dt}$ не получается членовъ вида $Am\cos(2\xi - \varphi)$, такъ-что и долгота Луны, подобно $\frac{1}{r}$ выражается эллиптической формулой безъ варіаціи $\Delta\varepsilon$, т. с. долгота дѣйствительная и долгота въ пластической орбитѣ въ данномъ случаѣ совпадаютъ. Для послѣдующихъ членовъ эвекціи $\frac{1}{r^2}\int Tr\,dt$ уже не равенъ 0 и при замѣнѣ неравенства съ аргументомъ $2\xi - \varphi$ варіаціями $\Delta\omega$ и Δe, въ выраженіи v появляются уже новые члепы, зависящіе отъ аргумента 2ξ, какъ результатъ округленія коэффиціентовъ.

Параллельно съ этимъ появляются и въ выраженіи $\frac{d\omega}{dt}$ соотвѣтствующіе члены съ тѣмъ-же аргументомъ 2ξ, какъ это мы видѣли въ изслѣдованіи «Движеніе Луннаго Перигея» (см. стр. 63, ур. 26). Членъ съ аргументомъ 2ξ въ выраженіи $\Delta\omega$ равняется

$$-\left(\frac{19}{16}m^2 + \frac{15}{32}m^3 + \ldots\right)\sin 2\xi$$

или около $1^\circ.\sin 2\xi$.

Таково-же происхожденіе и членовъ $\Delta\varepsilon$, зависящихъ отъ варіаціи. Вообще, при вычисленіи $\frac{1}{r}$ и v по способу измѣненія произвольныхъ постоянныхъ можно всегда допустить $\frac{dv}{dt} = \frac{h}{r^2}$, какъ въ эллипсѣ, при условіи введенія въ выраженіе v дополнительныхъ членовъ, зависящихъ отъ аргумента 2ξ.

20. Чтобы найти величину $\Delta\omega$ для даннаго момента времени, надлежитъ взять выраженіе $\frac{d\omega}{dt}$ въ видѣ:

$$\frac{d\omega}{dt} = \alpha\cos(2\xi - 2\varphi) + \beta\cos(2\xi - \varphi) + \gamma\cos(2\xi + \varphi) + \delta\cos 2\xi. \quad . \quad (21)$$

и проинтегрировать его въ соотвѣтствующихъ предѣлахъ.

Если мы пожелаемъ сдѣлать это вычисленіе, напримѣръ, для промежутка времени отъ одного перигея до другаго, то необходимо будетъ принять во вниманіе, что, хотя всѣ части производной $\frac{d\omega}{dt}$ имѣютъ видъ $N.\cos 2\xi$ въ перигеѣ и апогеѣ, но вообще, во всѣхъ остальныхъ точкахъ орбиты, кромѣ этихъ двухъ, аргументы 1-го, 2-го и 3-го членовъ $\frac{d\omega}{dt}$ не равны 2ξ, а имѣютъ видъ $2\xi \pm i\varphi$, стало-быть для опредѣленія величины періодическаго движенія перигея необходимо интегрировать отдѣльно каждый членъ $\frac{d\omega}{dt}$.

Коэффиціенты α, β, γ и δ по предъидущему намъ болѣе или менѣе извѣстны *).

$$\alpha = \left(\frac{15}{4}m^2 + \left(\frac{15}{4}\right)^2 m^3 + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{15}{4}\right)^3 m^4 + \ldots\right) n = 0.02781\,.\,n = 22'.6$$

---

*) См. стр. 63 Дв. Лунн. Перигея и §§ 4 и 8-ой настоящ. изслѣдованія.

$$\beta = -\left(\frac{9}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{4} + \ldots\right) \frac{m^2}{e} n = -226'.1$$
$$\gamma = \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}\right) \frac{m^2}{e} n = 75'.3$$
$$\delta = -6\,m^2 n = -27'.$$

При интегрированіи 3-го и 4-го членовъ производной $\frac{d\omega}{dt}$ по t появляются дѣлители 3 и 2, а

$$\int \alpha \cos (2\xi - 2\varphi) \, . \, dt$$

даетъ

$$\frac{\alpha \, . \sin (2\omega - 2\odot)}{-2mn - 2\sigma n},$$

гдѣ $-2\sigma n$ — часть дѣлителя, зависящая отъ варіаціи $\Delta\omega$, опредѣляемой при интегрированіи 2-го, 3-го и 4-го членовъ $\frac{d\omega}{dt}$.

Вслѣдствіе появленія малаго дѣлителя $-2mn - 2\sigma n$ интегралъ 1-го члена $\frac{d\omega}{dt}$ даетъ въ нѣкоторыхъ случаяхъ очень значительную часть общей величины $\Delta\omega$. Это объясняется отчасти тѣмъ, что аргументъ $2\omega - 2\odot$ совершенно не зависитъ отъ средней аномаліи Луны, а только отъ разности долготъ перигея и Солнца, слѣдовательно измѣняется сравнительно медленно.

Другое дѣло

$$\int \beta \, . \cos (2\xi - \varphi) \, dt.$$

Хотя коэффиціентъ β гораздо болѣе α, но такъ какъ

$$2\xi - \varphi = 2\xi - 2\varphi + \varphi = (2\omega - 2\odot) + \varphi,$$

то измѣненія $\cos (2\xi - \varphi)$ почти тѣ-же, что и $\cos \varphi$, въ особенности если для даннаго промежутка времени $2\omega - 2\odot$ близко къ 0.

Отсюда слѣдуетъ, что амплитуда измѣненій аргумента $2\xi - \varphi$ гораздо значительнѣе, чѣмъ аргумента $2\omega - 2\odot$, и во всякомъ случаѣ болѣе 180°, такъ что въ теченіе даннаго аномалистическаго мѣсяца $\cos (2\xi - \varphi)$ имѣетъ знаки $+$ и $-$, и въ результатѣ получается бо̀льшая или меньшая компенсація въ перемѣщеніи перигея, который въ нѣкоторыхъ частяхъ орбиты идетъ впередъ, а въ другихъ движется обратно, въ зависимости отъ знака при $\cos (2\xi - \varphi)$,

Необходимо припомнить, что пропорціональная времени часть $\frac{d\omega}{dt}$ по самому способу ея образованія зависитъ въ извѣстной степени отъ величины періодической части функціи $\Delta\omega$.

Это доказано по крайней мѣрѣ относительно періодическихъ членовъ $\frac{d\omega}{dt}$, зависящихъ отъ аргумента $2\omega - 2\odot$. Если взять

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{15}{4} m^2 n \cos (2\omega - 2\odot)$$

и подставить подъ знакомъ косинуса вмѣсто

$$2\omega \ldots 2\omega_0 - \frac{15}{4}\, m\, sin\,(2\omega - 2\odot),$$

то получится

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{15}{4}\, m^2 n\, cos\,(2\omega_0 - 2\odot) + \frac{225}{32}\, m^3 n \ldots,$$

т. е. періодическій членъ + постоянный.

Отсюда слѣдуетъ, что интегрируя уравненіе (21) мы должны считать въ 1-мъ членѣ подъ знакомъ косинуса ω_0 за *величину независимую* отъ

$$sin\,(2\omega_0 - 2\odot) \ldots$$

Но если $\Delta\omega$ въ аргументѣ перваго члена $\frac{d\omega}{dt}$ не должно включать

$$-\frac{15}{8}\, m\, sin\,(2\omega - 2\odot),$$

то этого нельзя сказать про остальные члены $\Delta\omega$, зависящіе отъ

$$sin\,(2\xi - \varphi) \text{ и пр.}$$

Изъ нихъ членъ

$$B\, sin\,(2\xi - \varphi),$$

зависящій отъ варіаціи Луны, имѣетъ, какъ мы видѣли, самый значительный коэффиціентъ изъ всѣхъ членовъ разложенія

$$\int \frac{d\omega}{dt}\, dt,$$

а именно—19°.72.

Такимъ образомъ при интегрированіи 1-го члена $\frac{d\omega}{dt}$ коэффиціентъ α можетъ получить дѣлителя, превышающаго $-3m$.

Представимъ себѣ, что мы вычислили рядъ

$$\int \frac{d\omega}{dt}\, dt$$

за исключеніемъ перваго члена и подставимъ затѣмъ въ аргументѣ 1-го члена величину $\Delta\omega$, выраженную, напримѣръ, въ видѣ $-2\sigma nt$: тогда получится:

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{d\omega}{dt}\, dt = \pm \frac{\alpha}{-(2\sigma + 2m)\, n} \Big|\, sin\,(2\omega - 2\odot) \Big|_{T_1}^{T_2} =$$

$$= \frac{+\left(\frac{15}{4}\, m^2 + \ldots\right) n}{-(2\sigma + 2m)\, n} \Big|\, sin\,(2\omega_0 - 2\odot) \Big|_{T_1}^{T_2} - \ldots$$

или въ градусахъ

$$\frac{-\left(\frac{15}{4} m^2 + \ldots\right)}{2\,(\sigma + m)} \cdot \frac{360}{2\pi} \Big|\, sin\,(2\omega - 2\odot) \Big|_{T_1}^{T_2},$$

гдѣ σ нѣкоторая перемѣнная величина, опредѣляемая каждый разъ по предварительномъ вычисленіи остальныхъ членовъ $\Delta\omega$.

Наша задача значительно упрощается при вычпсленіяхъ, относящихся къ прохожденію Луны черезъ перигей или черезъ апогей, такъ-какъ для этихъ точекъ лунной орбиты φ равно 0 или 180°. Въ перигеѣ $\varphi = 0$, и формула для $\Delta\omega$, найденная въ § 19 принимаетъ видъ:

$$\Delta\omega_n = -(\lambda \,.\, 11^\circ.44 + \mu \,.\, 18^\circ.53)\ (\sin\,[2\xi_2 - \sin 2\xi_1] =$$
$$= M\,[\sin 2\xi_2 - \sin 2\xi_1] \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \quad (22)$$

21. Переходя къ опредѣленію maximum'а и minimum'а аномалистическаго мѣсяца, допустимъ сначала для простоты разсужденія, что коэффиціентъ M въ выраженіи $\Delta\omega$ величина постоянная. Какъ видно изъ выраженія $\frac{d\omega}{dt}$, измѣненія долготы перигея въ теченіе извѣстнаго аномалистическаго мѣсяца, считаемаго, какъ обыкновенно отъ момента кратчайшаго разстоянія Луны отъ Земли, зависятъ главнымъ образомъ отъ аргумента 2ξ, т. е. отъ двойнаго угловаго разстоянія Луны отъ Солнца (или луннаго перигея отъ Солнца, ибо въ перигеѣ ☾ = ⊙) въ моментъ прохожденія Луны черезъ перигей.

Если, напримѣръ, $\odot > \omega$, или перигей позади Солнца, когда r minimum, и притомъ $\odot - \omega > +45^\circ$, но не болѣе 135°, то движеніе перигея сначала прямое, такъ какъ самый крупный членъ $\frac{d\omega}{dt}$ имѣетъ знакъ + при $\xi = -(45^\circ + \mu)$, гдѣ μ нѣкоторый малый уголъ, или при $2\xi - \varphi = -90^\circ - 2\mu$, а потомъ, съ увеличеніемъ φ, скорость перигея быстро мѣняетъ знакъ, и движеніе линіи ансидъ дѣлается обратнымъ, такъ-что Луна, совершивъ свое обращеніе отъ даннаго перигея до слѣдующаго, достигнетъ послѣдняго нѣсколько ранѣе обыкновеннаго, и аномалистическій мѣсяцъ будетъ короче средняго.

Положимъ, далѣе, что въ началѣ мѣсяца $\omega = \odot$; тогда 1-й членъ $\frac{d\omega}{dt}$ сравнительно очень мало измѣняется въ теченіе даннаго мѣсяца, оставаясь все время положительнымъ, а аргументъ 2-го члена или уголъ $2\xi - \varphi$ немного отличается отъ φ, ибо онъ вообще равенъ $2\omega - 2\odot + \varphi$, а $2\omega - 2\odot$ близко къ 0, слѣдовательно соотвѣтствующій членъ $\frac{d\omega}{dt}$ можно считать равнымъ $\beta \cos \varphi$ и

$$\int_{t_1}^{t_2} \beta \cos(2\xi - \varphi) = 0,$$

такъ-что бо́льшая часть движенія перигея опредѣляется 1-мъ членомъ.

Съ другой стороны, если въ началѣ мѣсяца $\omega_1 = \odot_1$, то уголъ $2\xi_2$ или $2\omega_2 - 2\odot_2$ въ концѣ мѣсяца будетъ равенъ

$$2\omega_1 - 2\odot_1 + 2A \cdot \frac{d\omega}{dt} - 2A \cdot \frac{d\odot}{dt},$$

а такъ-какъ, по нашему предположенію, аргументъ $2\omega - 2\odot$ почти не измѣняетъ своей величины за должайшій мѣсяцъ, то для maximum'а A:

$$2\omega_2 - 2\odot_2 = 2\omega_1 - 2\odot_1.$$

Отсюда слѣдуетъ, что скорость поступательнаго движенія перигея въ теченіе самаго продолжительнаго аномалистическаго мѣсяца равняется скорости Солнца, и стало-быть въ теченіе этого мѣсяца расхожденіе ихъ оказывается минимальнымъ.

Для кратчайшаго мѣсяца равенство $\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\odot}{dt}$, очевидно, не можетъ имѣть мѣста, ибо въ этомъ случаѣ перигей идетъ назадъ и притомъ быстрѣе, чѣмъ Солнце.

Мы увидимъ ниже, что при гипотезѣ

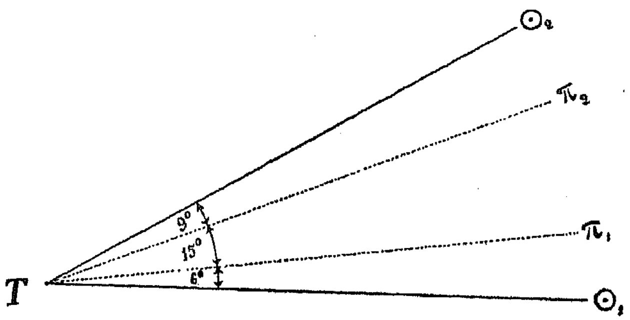
$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{d\odot}{dt}$$

кратчайшій мѣсяцъ опредѣляется по нашимъ формуламъ съ достаточной точностью.

Изъ уравненія

$$\Pi = M \sin 2\xi_2 - M . \sin 2\xi_1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (23)$$

гдѣ M, согласно нашей гипотезѣ, равняется 27° при maximum'ѣ Π, слѣдуетъ, что maximum $+ \Delta\omega$ соотвѣтствуетъ положительной величинѣ $\sin 2\xi_1$ и отрицательной $\sin \xi_2$, т. е. такой конъюктурѣ $\odot$, ☾ и π, когда въ началѣ мѣсяца Солнце почти настолько же позади перигея, насколько оно опережаетъ его къ концу мѣсяца.



Черт. 5.

22. Чтобы былъ достигнутъ maximum, перигей въ началѣ мѣсяца долженъ находиться впереди Солнца, а въ концѣ его позади. Самое естественное предположеніе то, которое требуетъ равенства (см. черт. 5-й) $\odot_2 T \pi_2 = \odot_1 T \pi_1 + 3°3'$.

Если принять

$$\odot_1 T\pi_1 = 6^\circ \text{ и } \odot_2 T\pi_2 = 9^\circ,$$

всѣ условія удовлетворяются; при этой комбинаціи $\xi_1 > 45^\circ$, во 2-хъ

$$\xi_2 = 351^\circ, \text{ т. е.} > 180^\circ$$

и

$$\Pi = M\,sin\,2\xi_2 - M\,sin\,2\xi_1 = 27^\circ\,sin\,18^\circ + 27^\circ\,sin\,12^\circ =$$

$$= 27^\circ\,[0.309 + 0.208] = 2.27^\circ\,sin\,15^\circ = 14^\circ.$$

Итакъ

$$2.27^\circ\,sin\left(\frac{27+3^\circ}{2}\right) = 2.27^\circ.\,sin\,\frac{1}{2}\left[T\,\frac{d\odot}{dt} + T\,\frac{d\omega}{dt}\right],$$

гдѣ

$$\frac{d\odot}{dt} = 59' \text{ и } \frac{d\omega}{dt} = 6'.68.$$

Зная maximum функціи П, немедленно находимъ и продолжительность самаго большаго аномалистическаго мѣсяца

$$A_{max} = A_0 + \frac{14.60}{900} = A_0 + 0^{д}.952$$

или около 1 сутокъ.

Примѣръ I. Аномалистическій мѣсяцъ 4 января—1 февраля 1908 г. продолжался $28^{д}13^{ч}.1$, т. е. былъ болѣе средняго на $1^{д}0^{ч}12^{м}$.

Для момента прохожденія черезъ перигей 11 января ($0^{ч}.6$)

$$\leftmoon = \omega_1 = 291^\circ 33'.3, \quad \omega_m = 300^\circ 33', \quad \odot_1 = 282^\circ 46',$$

$$\omega - \odot = 8^\circ.8, \quad 2\xi_1 = 17^\circ.6.$$

Для конца мѣсяца

$$\leftmoon = \omega_2 = 307^\circ 44'.3, \quad \omega_m = 303^\circ.3,$$

$$\odot_2 = 311^\circ 49'.6, \quad \omega_2 - \odot_2 = -4^\circ.5, \quad 2\xi_2 = -8^\circ 10'.$$

По этимъ даннымъ вычисляемъ $\Delta\omega_2$ и $\Delta\omega_1$:

$$\Delta\omega_1 = +27^\circ\,sin\,8^\circ 10' = 3^\circ.83, \quad \Delta\omega_1 = -27^\circ\,sin\,17^\circ.6 = -8^\circ.15.$$

Отсюда

$$\Delta\omega_2 - \Delta\omega_1 = 11^\circ.98$$

и слѣдовательно полное поступательное движеніе перигея впередъ за мѣсяцъ

$$11^\circ.98 + 3^\circ.05 = 15^\circ.30.$$

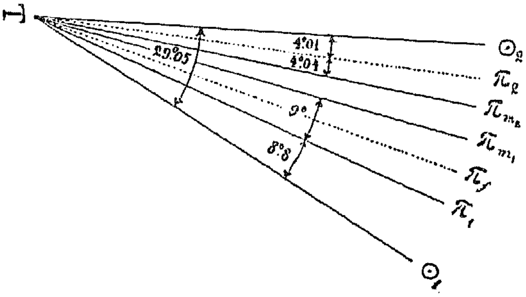
Среднее движеніе Луны около перигея, отстоящаго отъ Солнца приблизительно на 6°.5 (среднее ариѳметическое между 8°.8 и 4°.1) около

$912'$ въ сутки, слѣдовательно увеличенiе аномалистическаго мѣсяца въ дняхъ

$$= \frac{15.60}{912} = 0^{d}.99$$

или почти 1 сутки.

На чертежѣ (6) π_1 и π_2 — положенiя истиннаго перигея, π_{m_1} и π_{m_2} — средняго, π_f мѣсто перигея въ концѣ мѣсяца при условiи, что перiодическое движенiе $= 0$.



Черт. 6.

Примѣръ II. Аномалистическiй мѣсяцъ 15 дек. 1902 г.—12 янв. 1903 г. продолжался $28^{d}13^{ч}.3$ и былъ больше средняго также почти на 1 сутки.

Начало этого мѣсяца почти совпадало съ полнолунiемъ (перигей позже полнолунiя на $10^{ч}$).

15 дек. $1^{ч}.6$

$$☾_1 = \omega_1 = 88°31'.5, \quad \omega_1 - \omega_m = -6°, \quad \xi_1 = 185°51'.8, \quad 2\xi_1 = 11°43'.6.$$

Въ концѣ мѣсяца (янв. 12-го $14^{ч}.9$)

$$☾_2 = \omega_2 = 105°46'.5, \quad \omega_2 - \omega_m = +8°.1, \quad \xi_2 = 174°, \quad 2\xi_2 = 348°.$$

По этимъ даннымъ находимъ

$$\Pi = M \sin 2\xi_2 - M \sin 2\xi_1 = 27° \, [0.208 + 0.203] = 11°.1$$

Прибавляя къ 11°.1 поступательное движенiе 3°.1, находимъ

$$\Delta v = 14°.2,$$

и

$$\Delta A = \frac{14{,}2 \cdot 60}{880} = 0^{d}.99$$

23. Для кратчайшаго аномалистическаго мѣсяца функцiя П имѣетъ наибольшую отрицательную величину, слѣдовательно

$$2\xi_2 < 180° \quad \text{и} \quad 2\xi_1 > 180°.$$

Самое естественное предположенiе, которое мы можемъ сдѣлать относительно величины угла $\omega_1 - \odot_1$ или ξ_1 для опредѣленiя отрицательнаго maximum'а функцiи π_1 — это принять то ξ_1, при которомъ

$$-M \sin 2\xi_1 = M$$

т.-е.

$$\odot_1 - \omega_1 = 45^\circ;$$

тогда

$$2\omega_1 - 2\odot_1 = - 90^\circ \quad \text{и} \quad - 27^\circ . \sin 2\xi_1 = + 27^\circ = \omega - \omega_{m_1}.$$

Это значитъ, что истинный перигей въ началѣ мѣсяца находится впереди средняго на 27°, а солнце впереди истиннаго перигея на 45°.

Пусть π_1 мѣсто истиннаго перигея въ началѣ даннаго аномалистическаго мѣсяца, π_2 — мѣсто перигея въ концѣ его и π_f — мѣсто фиктивной точки, которая соотвѣтствовала бы положенію истиннаго перигея въ концѣ мѣсяца, если бы не было періодическаго движенія линіи апсидъ.

Долготы точекъ π_1, π_2 и π_f соотвѣтственно ω_1, ω_2 и $\omega_1 + T_0 \frac{d\delta\omega}{dt}$, гдѣ мы разумѣемъ подъ символомъ $\frac{d\delta\omega}{dt}$ постоянную часть скорости перигея, т.-е. $6'.68$, и слѣдовательно

$$T_0 \frac{d\delta\omega}{dt} = 3^\circ 3'.$$

Пусть x число дней, въ теченіе которыхъ Луна проходитъ дугу $\pi_2 \pi_f$, и A — продолжительность даннаго аномалистическаго мѣсяца; мы имѣемъ

$$n_1 A + n_2 x = 363^\circ,$$

гдѣ $n_2 x = \text{maximum}$ дуги $\omega_1 - \omega_2$. Черезъ A дней Солнце пройдетъ дугу $(360^\circ - n_2 x)\, m$ или въ среднемъ $27^\circ - m n_2 x$, слѣдовательно угловое разстояніе Солнца отъ перигея π_2 будетъ

$$45^\circ + 27^\circ - m n_2 x + (\omega_1 - \omega_2);$$

эта дуга должна равняться по опредѣленію $- \xi_2$ или $+ (\odot_2 - \omega_2)$.

Итакъ:

$$\odot_2 - \omega_2 = 72^\circ - m n_2 x + \omega_1 - \omega_2$$

или

$$- 2\xi_2 = 144^\circ - 2 m n_2 x + 2\,(\omega_1 - \omega_2) \quad . \; . \; . \; . \; . \; (24)$$

Для maximum'а функціи П очевидно требуется, чтобы $\sin 2\xi_1$ и $\sin 2\xi_2$ были приблизительно равны по величинѣ и противоположны по знаку, причемъ $\sin 2\xi_1$ долженъ быть равенъ — 1; отсюда $2\xi_2 = + 90^\circ$ или, по уравненію (24)

$$- 90^\circ = 144^\circ - 2 m n_2 x + 2\,(\omega_1 - \omega_2)$$

или

$$2\,(\omega_1 - \omega_2) - 2 m n_2 x = - 234^\circ,$$

что̀ можно написать и такъ:

$$2\,(\omega_1 - \omega_2) - 2m\,(\omega_1 - \omega_2) = - 234^\circ.$$

Пусть π_{m_1} мѣсто средняго перигея въ началѣ мѣсяца; по нашему предположенію

$$\pi_1 T\pi_{m_1} = +27^\circ \quad \text{и} \quad \omega_1 - \omega_2 = 27^\circ + y,$$

стало быть для опредѣленія y имѣемъ уравненіе:

$$(2\,.\,27^\circ + 2y)\,(1 - m) = -234^\circ$$

Отсюда

$$2y\,(1 - m) = -234^\circ - 54^\circ\,(1 - m) = -234^\circ - 50^\circ = -284^\circ$$

или $+76^\circ$ и $y = +\frac{38^\circ}{1-m} = 41^\circ$.

Если $y = 41^\circ$, то $\omega_1 - \omega_2 = n_2 x = 68^\circ$, что однако невозможно, ибо такого maximum'а не даютъ наблюденія.

Можно принять:

$$n_2 x = \omega_1 - \omega_2 = 2.27^\circ - 3^\circ\,{}^{*}) = 51^\circ$$

$$2\xi_2 = -144^\circ + 3^\circ.8 - 102^\circ = -242^\circ.2 \quad \text{или} \quad 117^\circ.8;$$

при этихъ величинахъ ξ_1 и ξ_2 уклоненіе перигея въ ту или другую сторону отъ средняго мѣста окажется равнымъ 25°.5.

Дугу въ 51° Луна проходитъ, двигаясь со средней скоростью 865.3 **), въ $3^d.54$, слѣдовательно кратчайшій аномалистическій мѣсяцъ равняется 24 днямъ.

Итакъ

$$n_1 A + 51^\circ = 363^\circ:$$

отсюда

$$A = \frac{312^\circ}{n_1}.$$

Скорость движенія Луны отъ π_1 до π_2 нѣсколько менѣе средней, ибо Луна не проходитъ совсѣмъ тѣхъ частей ея орбиты, гдѣ движеніе самое быстрое. Вычисленіе даетъ: $n_1 = +780'$, и $A = \frac{312^\circ.60}{780} = 24^d.02$.

При исчисленіи этого минимума, мы по необходимости должны были прибѣгнуть къ гипотезѣ относительно величины дуги $n_2 x$ и приняли ее вѣроятно нѣсколько болѣе истинной, а минимальный мѣсяцъ слишкомъ короткимъ.

---

*) Дуга $\omega_1 - \omega_2 = \pi_1\pi_{m_1} + \pi_{m_2}\pi_2 - \pi_{m_2}T\pi_{m_1}$.

**) Изъ общаго выраженія $\frac{dv}{dt}$ (см. § 3).

Для перваго приближенія однако этотъ результатъ представляется удовлетворительнымъ. Во всякомъ случаѣ вѣрно, что кратчайшій аномалистическій мѣсяцъ соотвѣтствуетъ тому положенію линіи апсидъ относительно линіи соединеній, которое наблюдается при совпаденіи перигея съ послѣдней четвертью въ концѣ мѣсяца.

При нашей гипотезѣ относительно $n_2 x$ мы имѣемъ

$$\odot_2 T\pi_2 = \odot_2 - \omega_2 = 25^\circ + 45^\circ + 51^\circ = 121^\circ;$$

если бы мы взяли вмѣсто $51^\circ - 20$, то получилось бы приблизительно

$$\odot_2 - \omega_2 = 25^\circ + 45^\circ + 20^\circ = 90,$$

а

$$\omega_2 - \omega_1 = 20^\circ + 2\,.\,3^\circ,1 = 26^\circ.2,$$

что̀ уже вѣроятнѣе.

Замѣтимъ кстати, что и звѣздный мѣсяцъ, кончающійся послѣдней четвертью, при условіи совпаденія этой фазы съ перигеемъ, оказывается самымъ краткимъ. Объясненіе этого явленія конечно тоже, что и для аномалистическаго мѣсяца.

Примѣръ. Звѣздный мѣсяцъ 29 Іюня — 26 Іюля 1883 г., кончившійся послѣдней четвертью, которая наступила черезъ 35 часовъ послѣ прохожденія Луны черезъ перигей, продолжался $27^д 5^ч 30^м$, т.-е. былъ короче средняго на $2^ч 13^м$.

Вообще, если отказаться отъ обычнаго условія относительно начала звѣздныхъ мѣсяцевъ (т. е. новолунія), то амплитуда колебаній величины T значительно расширится.

Самый продолжительный звѣздный мѣсяцъ тотъ, который начинается съ 1-й четверти и апогея. Въ началѣ мѣсяца $\xi = 270^\circ$, а въ концѣ (независимо отъ собственнаго движенія перигея, который идетъ назадъ) не болѣе 242°, слѣдовательно 2ξ не менѣе 124°, и $\Delta\omega$ равняется по крайней мѣрѣ—$27^\circ \sin 56^\circ$.

Такимъ образомъ, когда Луна, исходя отъ апогея сдѣлаетъ полный оборотъ, самъ апогей перемѣстится навстрѣчу Лунѣ, слѣдовательно она будетъ больше времени около апогея, и движеніе ея будетъ медленнѣе средняго, а отъ этого—мѣсяцъ длиннѣе средняго.

Примѣръ. Звѣздный мѣсяцъ 28 авг. — 24 сент. 1884 г. начался съ 1-й четверти за $7^1/_2$ часовъ до вступленія Луны въ апогей, и продолжался $27^д 20^ч.1^м$.

24. Возможны и другія условія minimum'а. Предположимъ, что $\xi_1 + \xi_2 = +180^\circ$, причемъ $\xi_1 = +300^\circ$, а $\xi_2 = 240^\circ$, тогда $\sin 2\xi_1 = -\sin 60^\circ$, и $\sin 2\xi_2 = +\sin 60^\circ$. Такъ какъ въ данной конъюктурѣ перигей быстро идетъ назадъ, то мы должны прибѣгнуть къ особой гипотезѣ относительно скорости *обратнаго* движенія перигея въ теченіе кратчайшаго мѣсяца.

По аналогіи съ формулой, выражающей среднее движеніе перигея *) $\left(\frac{3}{2}\, m^2 n\right)$ допустимъ, что maximum скорости $\frac{d\omega}{dt}$ въ отступательномъ движеніи перигея $= -\frac{3}{2} \cdot \frac{d\odot}{dt}$.

Тогда

$$2\omega_2 - 2\odot_2 = 2\omega_1 - 2\odot_1 + 2A \cdot \frac{d\omega}{dt} - 2A \cdot \frac{d\odot}{dt} =$$

$$= 2\omega_1 - 2\odot_1 - 5A \cdot \frac{d\odot}{dt} = 2\omega_1 - 2\odot_1 - 5mnt,$$

и коэффиціентъ при $\sin\,(2\omega - 2\odot)$ въ выраженіи $\Delta\omega$ принимаетъ видъ:

$$\frac{\left(\frac{15}{4}\, m^2 + \frac{225}{16}\, m^3 + \dots\right)}{-\,2\left(\frac{3}{2}\, m + m\right)} \cdot \frac{360}{2\pi} =$$

$$= -\left(\frac{15}{16}\, m + \frac{225}{64}\, m^2 + \dots\right)\frac{4}{5}\,\frac{360}{2\pi} =$$

$$= -\frac{0{,}02781}{5m} \cdot \frac{360}{2\pi} = -\,4^\circ.26,$$

и слѣдовательно

$$\lambda \,.\, 11^\circ.44 = 4^\circ.26.$$

Отсюда

$$\lambda = \frac{4{,}26}{11{,}44} = 0{,}364$$

и

$$\Pi = -\,[4^\circ.26 + 18^\circ.53]\,(\sin 2\xi_2 - \sin 2\xi_1) = -\,22'.79\,\{\sin 2\xi_2 - \sin 2\xi_1\} =$$

$$= -\,22^\circ.8\,[\sin 60^\circ + \sin 60^\circ] = -\,45^\circ.6 \,.\, \frac{1}{2}\sqrt{3} = -\,39^\circ.47.$$

Итакъ отступленіе перигея, зависящее отъ періодическихъ неравенствъ $\frac{d\omega}{dt}$, равняется—39°.47. Эту дугу Луна проходитъ со скоростью, соотвѣтствующей данному разстоянію Солнца отъ перигея (861′), въ промежутокъ времени

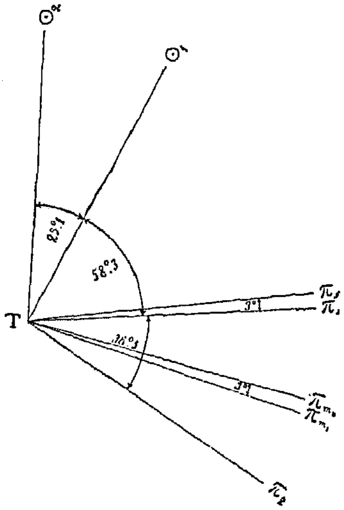
$$\frac{39^\circ.47 \times 60}{861} = 2^d.76,$$

слѣдовательно данный аномалистическій мѣсяцъ короче соотвѣтствующаго звѣзднаго на $2^d.76$.

---

*) См. § 6.

Примѣръ I. Изъ числа аномалистическихъ мѣсяцевъ, паблюденныхъ въ теченіе послѣднихъ 20 лѣтъ, я нашелъ самый краткій въ 1906 г. Онъ интересенъ еще и въ томъ отношеніи, что конъюктура Солнца и перигея для начала и конца этого мѣсяца почти совпадала съ идеальнымъ случаемъ, только что нами разсмотрѣннымъ.



Черт. 7.

Вотъ даиныя, извлечепныя изъ «Naut. Almanac'а» за 1906 г.

1906 г. 19 янв. $18^{ч}.2$ $\left\{ \begin{array}{l} \omega_1 = 240°58'.8 \\ \omega_{m_1} = 220°.6 \end{array} \right.$

$$\omega_1 - \omega_{m_1} = +\ 20°22'.8$$

13 февр. $10^{ч}.2$ $\left\{ \begin{array}{l} ☾_2 = \omega_2 = 204°26' \\ \omega_{m_2} = 223°.3 \end{array} \right.$

$$\omega_2 - \omega_{m_2} = -\ 18°52'$$

$\odot_1 = 299°17'.6$ $\qquad$ $\odot_2 = 324°19'$

$\xi_1 = \omega_1 - \odot_1 = -\ 58°18'.8$ $\qquad$ $\xi_2 = \omega_2 - \odot_2 = -\ 119°53'$

$2\xi_1 = 243°22'.4$ $\qquad$ $2\xi_2 = 120°14'$.

Въ началѣ мѣсяца истинный перигей былъ впереди средняго на 20°22'.8 *и позади Солнца* на 58°18'.8; вслѣдствіе быстраго отступленія линіи апсидъ, къ концу мѣсяца перигей и Солнце расходятся на $25°.1 + 58°.3 + 36.5 = 119°.9$, и Луна вступаетъ въ точку перигея раньше почти на 3 сутокъ.

Въ теченіе $24^{d}.67$ средній перигей, движущійся равномѣрно со скоростью 6'.68 въ сутки, перемѣстится изъ π_{m_1} въ π_{m_2} почти на 164'.8 или на 2°44'.8, а такъ какъ отступленіе перигея оказывается равнымъ 36°.5, то величина періодическаго движенія его составляетъ $36°.55 + 2°.75 = 39°.3$. (Наша формула даетъ — 39°.47).

Если T продолжительность соотвѣтствующаго звѣздиаго мѣсяца

$$[T = 27^{d}5^{ч}58^{м}],$$

то сравнительно съ этимъ мѣсяцемъ аномалистическій короче на $\frac{36°.5}{n_1}$, гдѣ n_1 соотвѣтствующая средняя скорость движенія Луны, но если мы пожелаемъ сравнить данный аномалистическій мѣсяцъ со среднимъ, т. е. съ $A_0 = 27^{d}13^{ч}18^{м}.6$, то должны принять въ разсчетъ еще нормальное среднее перемѣщеніе перигея, равное 3°.05 и прибавить этотъ уголъ къ 36°.5.

Такимъ образомъ получится

$$\Delta A = \frac{39^\circ.55}{n_1} = 2^д.88$$

и

$$A = A_0 - 2^д.88 = 24^д.667 = 24^д 16^ч.$$

Согласіе съ теоріей, какъ видимъ, вполнѣ удовлетворительное.

Примѣръ II. Аномалистическіе мѣсяцы 7 октября — 2 ноября и 2 ноября—27 ноября 1912 г.

Предварительно замѣтимъ, что послѣдній мѣсяцъ одинъ изъ самыхъ короткихъ, какіе могли быть наблюдаемы за послѣдніе 30 лѣтъ и почти равняется тому minimum'у, который даетъ теорія. Въ виду этого мы вычислимъ продолжительность обоихъ вышеуказанныхъ мѣсяцевъ съ большей подробностью, чѣмъ въ остальныхъ примѣрахъ.

Необходимыя данныя заимствуемъ изъ «Nautical Almanac'a»:

	7 окт. $6^ч.8$	2 ноября $22^ч.9$	27 ноября $22^ч.7$
$v = \omega$	156°36′.6	147°50′.6	115°53′.3
ω_m	133°50′.4	136°42′	139°36′
$\odot$	194° 7′.3	220°39′.7	245°51′.3
$\omega - \omega_m$	22°46′.2	11° 8′.6	—23°42′
$\xi = v - \odot$	—37°30′.7	—72°49′.1	—129°58′
2ξ	284°58′.6	214°21′.8	100° 4′
$\sin 2\xi$	—0.96617	—0.56441	+0.98460

$$A = T + \frac{\left\{\int_{t_1}^{t_2} \frac{d\omega}{dt}\, dt - \Delta\varepsilon\right\}}{n}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d\omega}{dt}\, dt = 6'.68 \,.\, A - [\lambda . 11^\circ.44 + (19^\circ.72 + 2^\circ.19 - 1^\circ.00 =$$

$$= 18^\circ.53]\ (\sin 2\xi_2 - \sin 2\xi_1).$$

Вычисленіе $\int_{t_1}^{t_2} \frac{d\omega}{dt}\, dt$ для 1-го мѣсяца.

Вмѣсто неизвѣстной величины A при вычисленіи этого интеграла мы можемъ брать A_0, т. е. $27^д.5546$, а λ опредѣляемъ или путемъ сравненія $\lambda \int_{t_1}^{t_2} 22'.6 \,.\, \cos\,(2\omega - 2\odot)\, dt$ съ произведеніемъ $22'.6 \cos\,(2\omega_0 - 2\odot_0) . A_0$, гдѣ аргументъ $2\omega_0 - 2\odot_0$ представляетъ собою среднее ариѳметическое между $2\xi_1 - 2\varphi_1$ и $2\xi_2 - 2\varphi_2$, или съ помощью извѣстной гипотезы относительно періодическаго движенія перигея.

Вычисленіе даетъ:

$$\frac{2\xi_1 + 2\xi_2}{2} = \frac{284^\circ 58'.6 + 214^\circ 21'.6}{2} = 249^\circ 40'.1.$$

$$A\,\frac{d\omega}{dt}\,.\,\cos 2\xi = -22'.0\,.\,27,5546\,.\cos 69^\circ 40' = -212'.3 = -3^\circ 32'.8.$$

По предварительному, грубому разсчету $\frac{d\omega}{dt} = -0,22\,\frac{d\odot}{dt}$*), такъ-что:

$$2\omega_2 - 2\odot_2 = 2\omega_1 + 2\,.\frac{d\omega}{dt}A - 2\odot_1 - 2\,\frac{d\odot}{dt}\,.\,A =$$

$$= 2\omega_1 - 2\odot_1 - 2,44\,\frac{d\odot}{dt}\,.\,A$$

и

$$\int_{t_1}^{t_2} \alpha\cos\{2\xi_1 - 2,44\,mn\}\,.\,dt =$$

$$= \frac{\left(\frac{15}{4}m^2 + \frac{225}{16}m^3 + \dots\right)n}{-2,44mn}\{\sin 2\xi_2 - \sin 2\xi_1) =$$

$$= -\left(\frac{15}{16}m + \frac{225}{64}m^2 + \dots\right)1,64\,\{\sin 2\xi_2 - \sin 2\xi_1\} =$$

$$= -\frac{11^\circ.44}{2}\,1,64\,\{\sin 2\xi_2 - \sin 2\xi_1\} = -3^\circ.76.$$

Пользуясь этимъ послѣднимъ опредѣленіемъ, положимъ:

$$-\lambda\,.\,11^\circ.44\,.\,\{\sin(2\xi_2) - \sin(2\xi_1)\} = -3^\circ.76.$$

Отсюда

$$\lambda = \frac{3\,.\,76}{11^\circ.44}\cdot\frac{1}{\sin 2\xi_2 - \sin 2\xi_1} = \frac{3\,.\,76}{11,44}\cdot\frac{1}{0,40176} = 0,82$$

и

$$\lambda\,.\,11^\circ.44 = 9^\circ.35.$$

Итакъ

$$\int\frac{d\omega}{dt}\,dt = 6'.68\,A - [9^\circ.35 + 18^\circ.53]\,.\,0,40176 =$$

$$= 2^\circ 58'.2 - 11^\circ 13' = -8^\circ 15'.$$

---

*) Замѣтимъ, что мы умышленно приняли $\frac{d\omega}{dt}$ нѣсколько менѣе величины, получаемой изъ N. A. Это потому, что мы пренебрегли варіаціей e. Одно компенсируется другимъ.

Далѣе имѣемъ:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d\varepsilon}{dt}\,dt = -\,1^\circ.44\,\{sin\,2\xi_2 - sin\,2\xi_1\} = -\,1^\circ.44\,.\,0{,}40176 =$$

$$= -\,0^\circ.576 = -\,36'.$$

Звѣздный мѣсяцъ T, начавшійся 7-го октября 1912 г. въ $6^ч.8$ оканчивается 3 ноября въ $13^ч.75$, слѣдовательно

$$T = 27^д 6^ч.95.$$

Такимъ образомъ находимъ:

$$A = 27^д 6^ч.95 - \frac{(8^\circ 15'.8 + 36')}{n_1}.$$

Для даннаго промежутка времени $n = 850'$, и стало быть:

$$\tau = \frac{8^\circ.15' + 36'}{850'} = 0^д.62 = 14^ч.88.$$

Итакъ

$$A = 27^д 6^ч.95 - 14^ч.88 = 26^д 16^ч.07.$$

Таблицы даютъ $26^д 16^ч.1$.

Для слѣдующаго аномалистическаго мѣсяца (2—27 ноября 1912 г.) средняя величина 2ξ ... $157^\circ.2$ и потому та часть скорости движенія перигея, которая зависитъ отъ аргумента $2\omega - 2\odot$, равняется

$$22'.6\,cos\,22'.8 = -\,20'.2,$$

слѣдовательно

$$\left(\frac{d\omega}{dt}\right).\,A = -\,20'.2\,.\,25 = -\,505'.$$

Положимъ

$$x\,(sin\,2\xi_2 - sin\,2\xi_1) = -\,505'.$$

Отсюда

$$x = -\,\frac{505'}{1.5487} = -\,5^\circ 26',$$

и тому же должно-бы равняться произведеніе

$$-\,\lambda\,.\,11^\circ.44\,(sin\,2\xi_2 - sin\,2\xi_1).$$

Итакъ

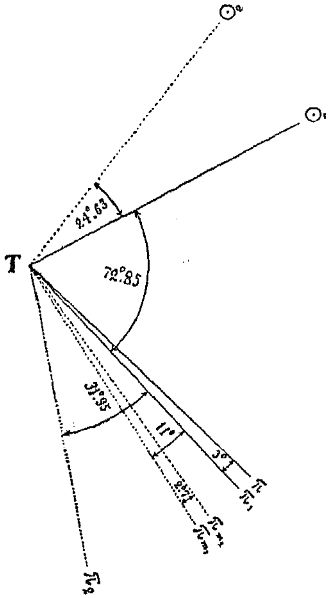
$$\lambda = \frac{5{,}45}{11{,}44\,.\,1{,}55} = 0{,}307,\ \lambda\,.\,11^\circ.44 = 3^\circ 30'$$

$$\lambda\,11^\circ.44 + 18^\circ.5 = 22^\circ.0.$$

Полагая, съ другой стороны $\frac{d\omega}{dt} = -1,26\,m$, находимъ:

$$\frac{\frac{15}{4}m^2 + \ldots}{-2m - 2,52\,m} \,.\, 1,5487 \,.\, \frac{360^\circ}{2\pi} = \frac{\frac{15}{4}m^2}{-4,52\,m} \,.\, 1,5487 \,.\, \frac{360^\circ}{2\pi} =$$

$$= \frac{\frac{15}{4}m^2}{-2\,m \,.\, 2,26} \,.\, 1,5487 \,.\, \frac{360^\circ}{2\pi} = -\frac{11^\circ.44}{2,26} \,.\, 1,5487 = -5^\circ.05.$$



Черт. 8.

Итакъ:

$$\int \frac{d\omega}{dt}\,dt = 2^\circ.9 - 23^\circ.6 \,.\, 1,5487 =$$

$$= 2^\circ.9 - 36^\circ.56 = -33^\circ 40'.$$

Затѣмъ находимъ:

$$\int \frac{d\varepsilon}{dt} \,.\, dt = +\, 2^\circ 13'.$$

Полная величина возмущенной средней аномалiи равняется, слѣдовательно,

$$-33^\circ 40' + 2^\circ 13' = -31^\circ 27'.$$

Отсюда

$$A = T - \frac{31^\circ 45' \,.\, 60}{866} = 27^{\partial}.178 - 2^{\partial}.18 =$$

$$= 24^{\partial}.998.$$

По даннымъ N. Alm. движенiе перигея за мѣсяцъ 2 — 27 ноября 1912 г. нѣсколько болѣе, а именно — 31°.95; (см. черт. 8), а аномалистическiй мѣсяцъ тотъ-же.

За промежутокъ времени отъ 2 ноября $22^{ч}.9$ до 27 ноября $22^{ч}.7$ долгота Луны уменьшилась на 147°50.′6 — 115°53′.3 или на 31°.95; это уменьшенiе объясняется значительнымъ отступленiемъ перигея, такъ какъ вообще, съ отступленiемъ перигея скорость Луны уменьшается (см. § 5), то слѣдовало бы ожидать, что соотвѣтствующiй звѣздный мѣсяцъ будетъ больше средняго; въ дѣйствительности онъ меньше средняго *), потому что дугу въ 31°.95 Луна проходитъ съ увеличенной скоростью.

Въ 25 сутокъ Луна проходитъ дугу въ 328° со средней скоростью 787′.2 вмѣсто 790′.6.

---

*) $T = 27^{\partial} 5^{ч}.36$, т. е. меньше среднягона $2^{ч}\,22^{м}$.

Какъ выводъ изъ наблюденій относящихся къ maximum'у и minimum'у аномалистическихъ мѣсяцевъ, мы можемъ формулировать такія заключенія:

1) Наибольшая скорость поступательнаго движенія перигея = средней скорости видимаго движенія Солнца, т. е. mn.

2) Наибольшая скорость обратнаго движенія перигея $= \frac{3}{2}$ средней скорости Солнца.

ГЛАВА VI.

Эллиптическое соотношеніе между движеніемъ Солнца и скоростью движенія перигея.

25. Перигей лунной орбиты въ своемъ движеніи слѣдуетъ за Солнцемъ и подчиняется его притяженію, какъ независимая отъ Луны матеріальная точка. Мы видѣли уже, что это положеніе справедливо, какъ по отношенію къ постоянной, такъ и къ періодической части поступательнаго движенія линіи апсидъ.

Пользуясь методомъ Пуассона, мы докажемъ, что измѣненія долготы перигея соотвѣтствуютъ вполнѣ варіаціямъ *эксцентрической аномаліи* въ эллиптическомъ движеніи извѣстной фиктивной точки, связанной съ Солнцемъ.

Исходя изъ выраженія:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{3}{4} m^2 n + \frac{15}{4} m^2 n \cos\,(2\omega - 2\odot) \,.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (25),$$

возьмемъ производную дуги $\odot - \omega$.

Мы имѣемъ:

$$\frac{d\,(\odot - \omega)}{dt} = \left\{ m - \frac{3}{4} m^2 - \frac{15}{4} m^2 \cos\,(2\omega - 2\odot) \right\} n,$$

откуда

$$\frac{d\,(\odot - \omega)}{1 - \frac{3}{4} m - \frac{15}{4} m \cos\,(2\omega - 2\odot)} = mndt.$$

Умножая числителя и знаменателя 1-й части этого уравненія на 4, а затѣмъ умножая обѣ части уравненія на $\left(1 - \frac{3}{4} m\right)$, находимъ:

$$\frac{4d\,(\odot - \omega)\left(1 - \frac{3}{4} m\right)}{4 - 3m - 15m \cos\,(2\omega - 2\odot)} = mn\left(1 - \frac{3}{4} m\right) dt$$

или

$$\frac{d(\odot - \omega)}{1 - \frac{15m}{4 - 3m} \cos(2\odot - 2\omega)} - mn\left(1 - \frac{3}{4}m\right) dt \quad . \; . \; . \quad (26)$$

Это уравненіе легко интегрируется.

Положимъ для краткости $\odot - \omega = y$,

$$\frac{15m}{4 - 3m} = \lambda$$

и представимъ 1-ую часть уравненія (26) въ видѣ:

$$\frac{dy}{\sin^2 y + \cos^2 y - \lambda(\cos^2 y - \sin^2 y)} = \frac{dy}{(1 - \lambda)\cos^2 y + (1 + \lambda)\sin^2 y} =$$

$$= \frac{\frac{dy}{\cos^2 y} \cdot \frac{1}{1-\lambda}}{1 - \left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\right) \cdot tg^2 y} = \frac{\frac{dy}{\cos^2 y} \cdot \frac{1}{1-\lambda} \sqrt{\frac{1-\lambda}{1+\lambda}} \cdot \sqrt{\frac{1+\lambda}{1-\lambda}}}{1 + \frac{1+\lambda}{1-\lambda} \cdot tg^2 y}.$$

Пусть $u = tg\, y$; тогда

$$du = \frac{du}{\cos^2 y},$$

и мы получаемъ, пользуясь обозначеніемъ

$$\sqrt{\frac{1+\lambda}{1-\lambda}} = \sqrt{\mu}:$$

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}} \mu^{\frac{1}{2}} du}{1 + \mu u^2} = mn\left(1 - \frac{3}{4}m\right) dt$$

или

$$\frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}} \cdot \frac{d(\sqrt{\mu}\, u)}{1 + (\sqrt{\mu}.u)^2} = mn\left(1 - \frac{3}{4}m\right) dt.$$

Отсюда

$$\frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}} \cdot arc\, tg(\sqrt{\mu} \,.\, u) = mn\left(1 - \frac{3}{4}m\right)(t + c),$$

гдѣ c постоянная, введенная интегрированіемъ.

Итакъ

$$arc\, tg(\sqrt{\mu} \,.\, tg\, y) = \sqrt{1-\lambda^2} \,.\, mn\left(1 - \frac{3}{4}m\right)(t + c) \quad . \; . \quad (27)$$

или

$$tg\left\{\sqrt{1-\lambda^2} \,.\, mn\left(1 - \frac{3}{4}m\right)(t + c)\right\} = \sqrt{\mu} \,.\, tg\, y.$$

По подстановкѣ вмѣсто μ и y ихъ величинъ, находимъ:

$$tg\left\{\sqrt{1-\lambda^2}\,.\,mn\left(1-\frac{3}{4}m\right)(t+c)=\sqrt{\frac{1+\lambda}{1-\lambda}}\,.\,tg\,(\odot-\omega)\right. \quad . \quad (28)$$

или въ 1-мъ приближеніи:

$$tg\,\{mn\,(t+c)\}=\sqrt{\frac{1+\lambda}{1-\lambda}}\,.\,tg\,(\odot-\omega).$$

Но это уравненіе выражаетъ соотношеніе между истинной аномаліей $2mn\,(t+c)$ и эксцентрической $2\,(\odot-\omega)$ *) въ эллиптическомъ движеніи по орбитѣ съ эксцентрицитетомъ $=\lambda$:

$$tg\,\frac{1}{2}\,(2mn\,(t+c))=\sqrt{\frac{1+\lambda}{1-\lambda}}\,.\,tg\,\frac{1}{2}\,.\,2\,(\odot-\omega)\,.\,.\,.\quad(29)$$

Итакъ весьма близко:

$$tg\,\frac{1}{2}\,2\odot=\sqrt{\frac{1+\lambda}{1-\lambda}}\,.\,tg\,\frac{1}{2}\,(2\odot-2\omega)\,.\,.\quad.\,.\,.\,(30)$$

Такъ какъ счетъ времени идетъ отъ перигея, то можно принять, что въ началѣ движенія $\omega=0$. Изъ уравненія (30) слѣдуетъ, что эксцентрическая аномалія $E=2\odot-2\omega$, а такъ какъ съ другой стороны она должна равняться $2\odot+\lambda\,sin\,E$ или $f-\lambda\,sin\,E$ **), то (если допустить, что въ началѣ движенія ω было равно 0) $2\omega=\lambda\,.\,sin\,(2\odot-2\omega)$, т. е. для періодической части ω

$$2\delta\omega=\lambda\,sin\,(2\odot-2\omega)=\frac{15m}{4-3m}\,.\,sin\,(2\odot-2\omega),$$

откуда

$$\delta\omega=-\left(\frac{15}{8}m+\ldots\right)sin\,(2\omega-2\odot)\ ^{*)}.$$

---

*) Ср. напр. Савича, Теор. Астр. стр. 74.

**) Это слѣдуетъ изъ соотношеній между средней и истинной аномаліями. Такъ какъ

$$f=M+2e\,sin\,M,$$

то въ нашемъ частномъ случаѣ

$$E=M+\lambda\,sin\,E=f-2\lambda\,sin\,M+\lambda\,sin\,E$$

или

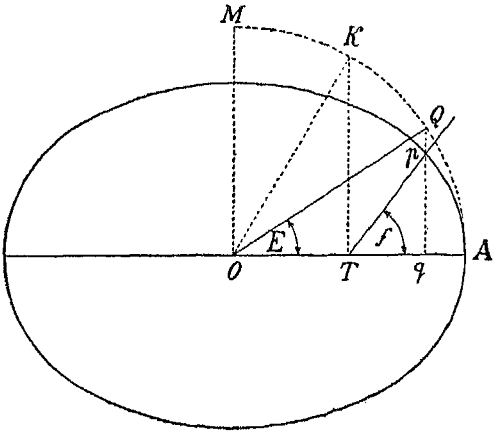
$$f-2\lambda\,sin\,2\odot+\lambda\,sin\,(2\odot-2\omega)=f-\lambda\,sin\,(2\odot-2\omega),$$

ибо вообще $2\odot$ значительно больше 2ω.

*) См. ур. 68, на стр. 96 Т. Дв. Луны Долгорукова.

Возвращаясь къ уравненію (28), находимъ по подстановкѣ:

$$tg\,(\odot-\omega)=\sqrt{\frac{1-\lambda}{1+\lambda}}\cdot tg\left\{\sqrt{1-\lambda^2}\,.\,mn\left(1-\frac{3}{4}\,m\right)(t+c)\right\}$$



Черт. 9.

или

$$tg\,(\odot-\omega)=\sqrt{\frac{4-18m}{4+12m}}\cdot tg\left(1-\left(\frac{15}{4}\right)^2 m^2\right)^{\frac{1}{2}} m\left(1-\frac{3}{4}\,m\right)n\,(t+c)\right\}=$$

$$=\sqrt{\frac{1-\frac{9}{2}\,m}{1+3m}}\;tg\left\{\left(m-\frac{3}{4}\,m^2\right)\left(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{225}{16}\,m^2\right)n\,(t+c)\right\}=$$

$$=\sqrt{\frac{1-\frac{9}{2}\,m}{1+3m}}\;tg\left\{\left(m-\frac{3}{4}\,m^2-\frac{225}{32}\,m^3+\frac{3}{8}\cdot\frac{225}{16}\,m^4\right)n\,(t+c)\right\}.$$

Если имѣемъ уравненіе $tg\,u=\mu\,.\,tg\,P$, то по извѣстной формулѣ, легко выводимой между прочимъ изъ теоремы Тэйлора,

$$u=p-\gamma_1\,sin\,2p-\ldots,$$

гдѣ

$$\gamma_1=\frac{1-\mu}{1+\mu},$$

слѣдовательно

$$(\odot-\omega)=\left(m-\frac{3}{4}\,m^2-\frac{225}{32}\,m^3-\frac{675}{128}\,m^4-\ldots\right)n\,(t+c)-$$

$$-\frac{\sqrt{1+3m}-\sqrt{1-\frac{9}{2}\,m}}{\sqrt{1+3m}+\sqrt{1-\frac{9}{2}\,m}}\,sin\,2p+\ldots$$

Но $\odot = mnt$, слѣдовательно по сокращеніи:

$$\omega = \omega_0 + \left(\frac{3}{4} m^2 + \frac{225}{32} m^3 + \frac{675}{128} m^4 + \dots\right) nt + \gamma_1 \sin 2p,$$

а такъ какъ P мало отличается отъ u, или отъ $\odot - \omega$, то можно принять:

$$\omega = \omega_0 + \left(\frac{3}{4} m^2 + \frac{225}{32} m^2 + \frac{675}{128} m^4 + \dots\right) nt + \gamma_1 \sin (2\odot - 2\omega).$$

Но

$$\gamma_1 = \frac{\sqrt{1 + 3m} - \sqrt{1 - \frac{9}{2} m}}{\sqrt{1 + 3m} + \sqrt{1 - \frac{9}{2} m}} = \frac{1 + 3m - \left(1 - \frac{9}{2} m\right)}{\left[\sqrt{1 + 3m} + \sqrt{1 - \frac{9}{2} m}\right]^2} =$$

$$= \frac{\frac{15}{2} m}{1 + 3m + 1 - \frac{9}{2} m + 2\sqrt{1 - \frac{3}{2} m}} = \frac{\frac{15}{2}}{4 - \frac{3}{2} m - \frac{3}{2} m \dots} =$$

$$= \frac{15}{8} m \left\{1 + \frac{3}{4} m\right\} = \frac{15}{8} m + \frac{45}{32} m^2 + \dots$$

Итакъ

$$\omega = \omega_0 + \left(\frac{3}{4} m^2 + \frac{225}{32} m^3 + \dots\right) nt +$$

$$+ \frac{15}{8} m \left(1 + \frac{3}{4} m\right) \sin (2\odot - 2\omega) \quad \dots\dots \quad (31)$$

Изъ уравненія

$$\frac{d(\odot - \omega)}{dt} = \left\{m - \frac{3}{4} m^2 - \dots - \frac{15}{4} m^2 \cos (2\omega - 2\odot)\right\} n$$

слѣдуетъ, между прочимъ, что при $\odot = \omega$:

1) $$\frac{d(\odot - \omega)}{dt} = \left(m - \frac{3}{4} m^2\right) n - \frac{15}{4} m^2 n,$$

а при $\odot = \omega \pm 90^\circ$

2) $$\frac{d(\odot - \omega)}{dt} = \left(m - \frac{3}{4} m^2\right) n + \frac{15}{4} m^2 n.$$

Переводя эти формулы на обыкновенный языкъ, можемъ формулировать слѣдующія заключенія:

1) Когда перигей совпадаетъ съ Солнцемъ или находится въ точкѣ

діаметрально ему противоположной, то уголъ ($\odot - \omega$), или угловое разстояніе Солнца отъ перигея *увеличивается медленнѣе средняго* (потому что перигей слѣдуетъ за Солнцемъ, и долгота его увеличивается періодическимъ членомъ).

2) Когда перигей и Солнце находятся относительно другъ друга въ квадратурахъ, то *увеличеніе угла* $\odot = \omega$ *наибольшее*; перигей идетъ въ обратную сторону отъ солнца и быстро отстаетъ отъ него. Это происходитъ оттого, что періодическій членъ въ выраженіи $\frac{d\,(\odot - \omega)}{dt}$ иоложителенъ *).

Изъ формулы (29), по предъидущему, слѣдуетъ, что связь между движеніемъ перигея и движеніемъ Солнца такая-же какъ и въ эллиптическомъ движеніи.

Представимъ себѣ, что Солнце или другое возмущающее свѣтило движется по эллиптической орбитѣ, большая ось которой равняется среднему разстоянію Луны отъ Земли, а эксцентрицитетъ $\frac{15}{4}m$, т. е. коэффиціенту эвекціи по долготѣ; слѣдовательно разстояніе $OT = \frac{15}{4}ma$. Скорость движенія нашего воображаемаго свѣтила, допустимъ, вдвое болѣе средней скорости Солнца, т. е. $= 2mnt$. Такъ-какъ въ точной формулѣ (28), изъ которой мы заимствовали 1-е приближеніе, выражаемое уравненіемъ (29), коэффиціентъ при mnt оказывается умноженнымъ на

$$\left(1 - \frac{3}{4}m\ldots\right),$$

то и постоянная часть движенія перигея находитъ себѣ выраженіе въ нашей формулѣ. Подобно тому, какъ аргументъ эллиптическаго неравенства въ долготѣ Луны имѣетъ видъ $cnt + \varepsilon - \omega$, такъ и здѣсь онъ уменьшенъ за постоянное движеніе перигея. Такимъ образомъ выраженіе эксцентрической аномаліи даетъ полную картину движенія перигея.

Когда $$f = \frac{\pi}{2},\quad OT = \frac{15}{4}ma = a\cos E,$$

слѣдовательно

$$\cos E = \frac{15}{4}m, \quad \text{и} \quad E = 90^\circ - 16^\circ23' = 73^\circ37' \quad 2\,(\odot - \omega) = 73^\circ37',$$

и принимая $2\odot = 90^\circ$ находимъ

$$\Delta\omega = 8^\circ11'.5.$$

Отъ послѣдующихъ членовъ эвекціи и отъ варіаціи $\Delta\omega$ увеличивается, какъ мы видѣли, до 27°.

---

*) Замѣтимъ, что эти заключенія справедливы во всей строгости только по отношенію къ той части движенія перигея, которая зависитъ отъ аргумента $2\omega - 2\odot$.

ГЛАВА VII.

Неравенства драконическихъ мѣсяцевъ.

26. Пусть Δ_0 число сутокъ въ среднемь драконическомъ мѣсяцѣ, F число сутокъ въ среднемъ оборотѣ линіи узловъ ($6793^d.391$) и T_0 — по принятому нами обозначенію — число сутокъ въ среднемъ звѣздномъ мѣсяцѣ. Между этими величинами существуетъ извѣстное соотношеніе:

$$\frac{360^\circ}{\Delta_0} = \frac{360^\circ}{T_0} + \frac{360^\circ}{F}.$$

Отсюда

$$\Delta_0 = \frac{FT_0}{F + T_0} = \frac{T_0}{1 + \dfrac{T_0}{F}} = T_0\left[1 + \frac{T_0}{F}\right]^{-1} = T_0\left[1 - \frac{T_0}{F} + \left(\frac{T_0}{F}\right)^2 + \ldots\right].$$

Обозначая буквою ζ среднюю скорость движенія линіи узловъ, или, точнѣе, число минутъ въ дугѣ, проходимой линіей узловъ въ ея отступательномъ движеніи въ 1 сутки, имѣемъ:

$$\zeta = \frac{21600}{F} = 3'.17,$$

$$T_0 : F = \frac{21600}{n} : \frac{21600}{\zeta} = \frac{\zeta}{n} = \mu = 0.00402$$

и слѣдовательно

$$\Delta_0 = T_0\,[1 - \mu + \mu^2 - \ldots] = T_0\,.\,0{,}996\ldots = 27^d5^ч5^м.6 = 27^d.2122\ldots$$

Такъ какъ скорость движенія линіи узловъ неравномѣрна, то и величина драконическаго мѣсяца непостоянна.

Пусть $\pm\,\sigma$ — дуга на которую перемѣстится узелъ въ теченіе даннаго звѣзднаго мѣсяца, считаемаго отъ узла Лунной орбиты ☊$_1$; очевидно соотвѣтствующій драконическій мѣсяцъ будетъ длиннѣе или короче T на $\frac{\sigma}{n_1}$, смотря по знаку σ, слѣдовательно вообще

$$\Delta = T \pm \frac{\sigma}{n_1}.$$

Итакъ вопросъ о неравенствахъ драконическихъ мѣсяцевъ сводится къ опредѣленію дуги σ въ зависимости отъ координатъ Луны и разстоянія восходящаго узла лунной орбиты отъ Солнца.

Въ выраженіи v имѣются члены:

$$— 411''.7 \, sin \, 2\eta + 70'' \, 4 \, sin \, (2\xi — 2\eta) + 68''.9 \, . \, sin \, (\varphi — 2\eta),$$

гдѣ

$$\eta = nt + \varepsilon — \text{☊}.$$

При прохожденіи Луны черезъ узелъ $\text{☾} = \text{☊}$ и приблизительно $\eta = 0$, такъ-что

$$\Delta v = 70''.4 \, sin \, 2\xi + 68''.9 \, sin \, \varphi.$$

По формулѣ

$$\frac{d\text{☊}}{dt} = \frac{na}{\mu \sqrt{1 — e^2}} \cdot \frac{1}{sin \, i} \cdot \frac{dR}{di}$$

находимъ:

$$\frac{d\text{☊}}{dt} = \frac{dR}{di} = \left(\frac{3}{4} m^2 + \frac{19}{8} m^3\right) cos \, (2\xi — 2\eta) +$$

$$+ \frac{3}{4} m^2 \, cos \, 2\eta — \frac{9}{4} m^2 e \, cos \, (\varphi — 2\eta) +$$

$$+ \frac{3}{4} m^2 c \, cos \, (\varphi + 2\eta) — \frac{3}{4} m^2 \, cos \, 2\xi.$$

Отсюда

$$\int \frac{d\text{☊}}{dt} dt = 1^\circ 43'.9 \, sin \, (2\odot — 2\text{☊}) — 7'.2 \, sin \, 2\xi + 7'.2 \, cos \, 2\eta =$$

$$= D \, . \, sin \, (2\odot — 2\text{☊}) — E \, . \, sin \, 2\xi + G \, cos \, 2\eta.$$

Члены съ коэффиціентами E и G, какъ сравнительно незначительные, мы отбрасываемъ.

27. Maximum и minimum драконическаго мѣсяца зависятъ, какъ видимъ, отъ знака и величины угла $2\odot — 2\text{☊}$ или отъ двойнаго разстоянія восходящаго узла отъ Солнца.

Функція

$$D \, [sin \, (2\odot_2 — 2\text{☊}_2) — sin \, (2\odot_1 — 2\text{☊}_1)]$$

или

$$D \, (sin \, 2u_2 — sin \, 2u_1),$$

достигаетъ наибольшей или наименьшей величины при $cos \, 2u_2 = cos \, 2u_1$, причемъ maximum поступательнаго движенія узла обусловливается наибольшей средней величиной $cos \, 2u$ со знакомъ $+$.

Въ самомъ дѣлѣ,

$$\frac{d\Omega}{dt} = D \,.\, \cos 2u,$$

слѣдовательно если $\cos 2u$ въ теченіе всего драконическаго мѣсяца положителенъ, то узелъ замѣтно подвинется впередъ.

Такъ какъ

$$2\odot_2 - 2\Omega_2 = 2\odot_1 - 2\Omega_1 + 2\,\frac{d\odot}{dt}\,.\,\tau - 2\,\frac{d\Omega}{dt}\,.\,\tau$$

и вообще $\frac{d\Omega}{dt}$ отрицательно, то въ среднемъ

$$2\odot_2 - 2\Omega_2 = 2\odot_1 - 2\Omega_1 + 54^\circ + 2^\circ 53',$$

ибо движеніе Солнца впередъ за мѣсяцъ почти равно 27°, а среднее отступленіе узла 1°26′.7.

Итакъ

$$2u_2 = 2u_1 + 56^\circ.9 \quad \text{и} \quad u_2 = u_1 + 28^\circ.45.$$

Предположимъ, что въ началѣ даннаго драконическаго мѣсяца u_1 или

$$(\odot_1 - \Omega_1) = -\,\frac{56^\circ.9}{4} = -\,14^\circ.2;$$

при этомъ условіи

$$2u_1 = -\,28^\circ.4 \quad \text{и} \quad 2u_2 = +\,28^\circ.4 \quad \text{и} \quad \cos 2u_2 = \cos 2u_1.$$

Итакъ наибольшее перемѣщеніе узла впередъ соотвѣтствуетъ углу $\odot_1 - \Omega_1 = -\,14^\circ.2$ или тому положенію восходящаго узла относительно Солнца, при которомъ въ началѣ мѣсяца узелъ впереди Солнца приблизительно на половину $\frac{d\odot}{dt}\,.\,\tau$.

Мы имѣемъ:

$$\cos 2u_1 = \cos 2u_2 = \cos 28^\circ.4$$

и

$$N_{max} = \frac{d\Omega}{dt}\,.\,\cos 28^\circ.4\,.\,\Delta = 4'.0{,}881\,.\,27.212 = 95'.9 = 1^\circ 35'.9.$$

Драконическій мѣсяцъ оказывается самымъ короткимъ, когда къ среднему отступательному движенію узла присоединяется таковое-же періодическое.

Въ этомъ случаѣ $\cos 2u_1$ и $\cos 2u_2$ оба отрицательны, слѣдовательно

$$2u_1 > 90^\circ \text{ и } 2u_2 > 90 + 56^\circ.9.$$

Положимъ

$$2u_1 = 180^\circ + -\,28^\circ.45,$$

тогда

$$2u_2 = 180^\circ + 28^\circ.45 \text{ и } \cos 2u_1 = \cos 2u_2 = -\cos 28^\circ.45.$$

Условіе minimum'а удовлетворяется, какъ видимъ, при

$$u_1 = 75^\circ.8 \text{ и } u_2 = 90^\circ + 14^\circ.2 = 104^\circ.2.$$

Итакъ

$$N_{min} = -\frac{d☊}{dt}\,.\cos 28^\circ.4\;.\;T = -1^\circ 35'.9.$$

Замѣтимъ, что въ 1-мъ случаѣ, т. е. при условіи поступательнаго движенія узла

$$\left(\int\limits_1 \frac{d☊}{dt}\,dt\right)_1 = D\int \cos\,(2\odot - 2☊)\,dt = \frac{D\;.\;\sin 2u}{2\,mn},$$

ибо измѣненіе ☊ подъ знакомъ *cos* незначительно (періодическое движеніе впередъ компенсируется пропорціональнымъ времени отступленіемъ), а во 2-мъ

$$\left(\int\limits_2 \frac{d☊}{dt}\,dt\right)_2 = \frac{D\,\sin 2u}{2\,mn + 2\,\frac{d☊}{dt}\,n},$$

слѣдовательно

$$\int\left(\frac{d☊}{dt}\right)_2 dt < \int\left(\frac{d☊}{dt}\right)_1 dt$$

т. е. отступленіе узла, зависящее отъ періодическихъ неравенствъ, caeteris paribus, вообще значительнѣе его передвиженія впередъ.

Когда *cos* $(2\odot - 2☊)$ все время положительно, то уклоненія драконическаго мѣсяца отъ соотвѣтствующаго звѣзднаго совершенно незначительны. Отсюда слѣдуетъ, что maximum драконическаго мѣсяца болѣе или менѣе совпадаетъ съ наибольшей величиной звѣзднаго мѣсяца.

Зная уголъ σ, немедленно находимъ maximum и minimum драконическаго мѣсяца.

28. По предъидущему, 1) когда узелъ идетъ впередъ

$$N_1 = 4'.\cos 28^\circ.4\,(T + \delta T),\;\; \sigma_1 = N_1 - 1^\circ 26'.7.$$

2) когда узелъ отступаетъ

$$N_2 = 4'.\cos 28^\circ.4\,(T - \delta T),\;\; \sigma_2 = -N_2 - 1^\circ 26'.7.$$

Такъ какъ въ среднемъ

$$4'.\cos 28^\circ.4.\;T = 1^\circ 35'.9,$$

то для наиболѣе продолжительнаго мѣсяца

$$\sigma_1 = N_1 - 1^\circ 26'.7 = +9'.2 \text{ и } \delta\Delta = \delta T = \frac{9'.2}{790.'6} = 0^d.011,$$

или около 16 минутъ времени,

а для самаго короткаго

$$\sigma_2 = -1^\circ 35'.9 - 1^\circ 26'.7 = -3^\circ 2'.6 \text{ *)},$$

и

$$\delta\Delta = \delta T = -\frac{182'.6}{790'.6} = -0^{д}.229 \text{ или } 5^{ч}.5.$$

Такова величина $\delta\Delta$ для средней величины n, т. е. для $n = 790'.6$; если же во время прохожденія черезъ восходящій узелъ Луна находится близко отъ перигея, то скорость ея движенія больше, и слѣдовательно $\delta\Delta$ нѣсколько менѣе $5^{ч}.5$; при совпаденіи узла съ апогеемъ, наоборотъ, $\delta\Delta$ немного болѣе $5^{ч}.5$.

Примѣръ I. Одинъ изъ самыхъ короткихъ драконическихъ мѣсяцевъ наблюдался въ 1901 г.

Изъ Naut. Alm. извлекаетъ слѣдующія данныя:

1901 г.	$v_1 = \text{☊}_1 = 237^\circ 37'$
11 февр.	$\odot_1 = \quad 322^\circ 47'$
$16^{ч}.72$	$\odot_1 - \text{☊}_1 = 84^\circ 50'$
(Моментъ прохолкденія ☾ черезъ восходящій узелъ).	$2u_1 = 169^\circ 40'$
	$v_2 = \text{☊}_2 = 234^\circ 38'$
10 марта	$\odot_2 = \quad 350'$
$18^{ч}.22$	$\odot_2 - \text{☊}_2 = 115^\circ 44'$
(возвращеніе къ ☊)	$2u_2 = 230^\circ 44'$

Мы находимъ:

$$D\, sin\, [230^\circ,7 - sin\, 169^\circ 40] = -D\, [sin\, 50^\circ.7 + sin\, 10^\circ.3] =$$

$$= -103^\circ,9.0,953 = -99'.2.$$

Присоединяя сюда постоянную часть отступленія узла, т. е. $1^\circ 26.'7$, получаемъ:

$$\sigma = -99'.2 - 86'.7 = -185.'9$$

и

$$\frac{\sigma}{n_1} = -\frac{158'.9}{712'.8} = -0^{д}.223 = -5^{ч}.35.$$

Соотвѣтствующій звѣздный мѣсяцъ 11 февраля $16^{ч}.72$—10 марта $23^{ч}.68$ продолжался $27^{д}6^{ч}.96$, слѣдовательно драконическій долженъ бы равняться $27^{д}1^{ч}.61$ (таблицы даютъ $27^{д}1^{ч}.50$).

---

*) Не лишено интереса, что σ_2 почти равняется по величинѣ поступательному движенію перигея за мѣсяцъ $\left(\frac{d\omega}{dt}\, T = 3^\circ 3'\right)$. Наибольшее отступленіе узла за мѣсяцъ = постоянной части поступательнаго движенія перигея за то же время.

Примѣръ II. Драконическій мѣсяцъ Апрѣль—Май 1912 г. начался 16 апрѣля въ $13^{ч}.76$ и окончился 13 мая въ $22^{ч}.54$.

Онъ короче соотвѣтствующаго звѣзднаго на $+ 0.5$ или почти на полчаса ($\Delta = 27^{д}8^{ч}.78$; $T = 27^{д}9^{ч}.28$).

$$\begin{array}{c} 16 \text{ апр.} \\ 13^{ч}.71 \end{array} \left\{ \begin{array}{ll} ☾_1 = ☊_1 & = 21^\circ 34'.4 \\ \odot_1 & = 26^\circ 40'.9 \\ \hline \omega_1 - ☊_1 & = 5^\circ\ 6'.5 \\ 2u_1 & = 10^\circ 13' \end{array} \right. \qquad \begin{array}{c} 13 \text{ мая} \\ 22^{ч}.54 \end{array} \left\{ \begin{array}{ll} ☾_2 = ☊_2 & = 21^\circ 18'.0 \\ \odot_2 & = 53^\circ 14' \cdot 6 \\ \hline \omega_2 - ☊_2 & = 31^\circ 56'.6 \\ 2u_2 & = 63^\circ 53'.2 \end{array} \right.$$

$$D(\sin 63^\circ.9 - \sin 10^\circ.2) = 103'.9\,(0.894 - 0.177) = 1023'.9.0,717 = 74'.3.$$

Восходящій узелъ подвинулся впередъ на $74'.3$, и отступилъ за мѣсяцъ (пропорціональная времени часть $\frac{d☊}{dt}$) на $86'.6$, слѣдовательно его ретроградное движеніе равняется приблизительно $12'.3$. Такъ какъ при окончаніи драконическаго мѣсяца n_1 было $= 796'$, то

$$\frac{\sigma}{796'} = \frac{12'.3}{796} = 0^{д}.015 = 0^{ч}.37.$$

Н. Долгоруковъ.

ГЛАВА VIII.

Общіе выводы.

29. Принявъ въ разсчетъ только уравненіе центра и эвекцію, мы нашли въ §§ 9-мъ и 10-мъ для самаго продолжительнаго мѣсяца:

$$\delta v = -28'.94 - 57'.9,$$

а для самаго короткаго

$$\delta v = + 28'.94 + 57'.9.$$

Это значитъ, что въ концѣ мѣсяцевъ, начинающихся совпаденіемъ новолунія соотвѣтственно съ перигеемъ и съ апогеемъ,

$$\left(\frac{15}{4} me + \ldots\right) sin\,(2\xi - \varphi) = 4e\; sin\,\varphi,$$

а такъ-какъ въ концѣ этихъ мѣсяцевъ $sin\,\varphi$ имѣетъ величину отличную отъ 0 только благодаря прибавленію къ аргументу φ величины средняго движенія перигея за мѣсяцъ, то предъидущее уравненіе выражаетъ, что постоянная часть движенія перигея такъ относится къ періодической,— насколько послѣдняя зависитъ отъ эвекціи, что *неравенство долготы, носящее названіе эвекціи, оказывается вдвое болѣе уравненія центра.*

Такъ-какъ сумма

$$2e\, sin\,\varphi + \left(\frac{15}{4} me + \ldots\right) sin\,(2\xi - \varphi)$$

можетъ быть представлена въ видѣ $2e_1\, sin\,\varphi_1$ (см. § 19 Т. Дв. Л.), то для точекъ орбиты, къ которымъ возвращается Луна къ концу самаго продолжительнаго и самаго краткаго звѣздныхъ мѣсяцевъ:

$$2e_1\; sin\,\varphi_1 = 6e_0\, sin\,\varphi_0,$$

гдѣ e_0 и φ_0 первоначальныя величины эксцентрицитета и средней аномаліи, неизмѣненныя за эвекцію.

Если оставить въ выраженіи v только главные члены (уравненія центра, эвекцію и варіацію), то величины T_{max} и T_{min} могутъ быть представлены въ видѣ:

$$T_{max} = \frac{21600' - 6e_0 \sin\varphi_0 + 31'.2}{790'.6} = \frac{21600' + 118'.04}{790.'6}$$

$$T_{min} = \frac{21600' + 6e_0 \sin\varphi_0 + 32'.5}{790'.6} = \frac{21600' - 54'.34}{790'.6}$$

или

$$T_{max} = T_0 + \frac{118'.04}{21600'} \cdot \frac{21600'}{790'.6} = T_0 + 0{,}005465\ T_0\ . \qquad (32)$$

и

$$T_{min} = T_0 - \frac{54'.34}{21600'} \cdot \frac{21600'}{790'.6} = T_0 - 0{,}002516\ T_0\ . \qquad (33)$$

Отсюда:

$$T_{max} - T_{min} = \frac{172'.38}{790'.6} = 0{,}007981\ T_0\ .\ .\ .\ .\ .\ . \qquad (34)$$

Эти выраженія нетрудно представить въ зависимости отъ разности $(A_0 - T_0)$.

Мы нашли въ § 16:

$$A_0 - T_0 = \frac{6'.68}{790'.6}\, T_0 = 0.0084\ T_0$$

Сравнивая выраженія (32) и (33) съ $A_0 - T_0$, получаемъ:

$$T_{max} = T_0 + \frac{5}{8}\left(1 + \frac{3}{2}\, m\right)(A_0 - T_0)\ .\ .\ .\ .\ .\ . (35)$$

$$T_{min} = T_0 - \frac{5}{16}\left(1 + \frac{3}{4}\, m\right)(A_0 - T_0)\ \ .\ .\ .\ .\ . (36)$$

и

$$T_{max} - T_{min} = \frac{15}{16}\left(1 + \frac{75}{64}\, m\right)(A_0 - T_0)\ \ .\ .\ .\ . (37)$$

Послѣднее равенство выражаетъ, что разность между самымъ продолжительнымъ и самымъ краткимъ звѣздными мѣсяцами весьма мало отличается отъ разности между средними величинами аномалитическаго и звѣзднаго мѣсяцевъ.

Повѣримъ формулы 35 — 37 съ помощью результатовъ, найденныхъ въ §§ 9 и 10.

Мы имѣемъ:

$$T_{max} = 27^{\text{д}}7^{\text{ч}}43^{\text{м}}.2 + \frac{5}{8}\left(1 + \frac{3}{2}\, m\right)(A_0 - T_0) =$$

$$= 27^{\text{д}}7^{\text{ч}}43^{\text{м}}.2 + 0^{\text{д}}.1619 = 27^{\text{д}}7^{\text{ч}}43^{\text{м}}.2 + 3^{\text{ч}}53^{\text{м}}.2 = 27^{\text{д}}11^{\text{ч}}46^{\text{м}}.4$$

$$T_{min} = 27^{\text{д}}7^{\text{ч}}43^{\text{м}}.2 - \frac{5}{16}\left(1 + \frac{3}{4}\, m\right)(A_0 - T_0) =$$

$$= 27^{\text{д}}7^{\text{ч}}43^{\text{м}}{:}2 - 0.^{\text{д}}07686 = 27^{\text{д}}7^{\text{ч}}43.2 - 1^{\text{ч}}50^{\text{м}}.6 = 27^{\text{д}}5^{\text{ч}}52^{\text{м}}.8$$

Такимъ образомъ формулы (35) и (36) представляютъ найденныя въ §§ 9 и 10 величины наибольшаго и наименьшаго звѣздныхъ мѣсяцевъ съ точностью, соотвѣтствующею данной степени приближенія (читатель припомнитъ, что мы брали во вниманіе только главныя неравенства).

Формулы для T_{max} и T_{min} показываютъ, что въ концѣ мѣсяцевъ, начинающихся совпаденіемъ новолунія соотвѣтственно съ перигеемъ и апогеемъ варіація увеличиваетъ звѣздный мѣсяцъ въ обоихъ случаяхъ почти настолько-же, насколько онъ увеличивается въ 1-мъ случаѣ отъ уравненія центра и — уменьшается во 2-мъ случаѣ отъ того-же неравенства.

Эвекція въ обоихъ случаяхъ вдвое болѣе уравненія центра и съ тѣмъже знакомъ.

30. Какъ видно изъ формулъ для опредѣленія T_{max} и T_{min}, варіація входитъ въ ту и другую почти одинаково.

Въ 1-мъ случаѣ (см. § 9)

$$v = nT + \ldots - 31.'2,$$

а во 2-мъ:

$$v = nT + \ldots - 32.5.$$

Отсюда слѣдуетъ, что и самый продолжительный и самый короткій мѣсяцы, начинающіеся съ новолунія, увеличиваются вслѣдствіе варіаціи почти на ту-же величину, а именно на $\left(\frac{31.9}{790.6}\right)$ дней, или на $0''.96$.

Такъ какъ счетъ мѣсяцевъ съ новолунія совершенно условный, и мы могли бы считать звѣздные мѣсяцы отъ какой угодно точки орбиты, то въ суммѣ дней $T_1 + T_2 + T_3 + \ldots$, гдѣ T_1, T_2, T_3, ... числа дней въ послѣдовательныхъ звѣздныхъ мѣсяцахъ, начинающихся — первый, положимъ отъ новолунія, а второй отъ той точки, гдѣ окажется Луна, когда она пройдетъ по долготѣ ровно 360° и т. д. — въ этой суммѣ $T_1 + T_2 + \ldots$ измѣненія, зависящія отъ варіаціи и отъ другихъ неравенствъ, конечно, взаимно компенсируются.

Если же считать мѣсяцы, какъ обыкновенно, каждый разъ отъ новолунія. то окажется, что средній звѣздный мѣсяцъ постоянно болѣе той величины, которую даютъ наблюденія, и слѣдовательно при обычномъ счетѣ мѣсяцевъ средняя скорость обращенія какъ-бы уменьшается. Когда Луна въ новолуніи, $2\xi = 0$, а при завершеніи звѣзднаго оборота ξ въ среднемъ равняется — 27°. Чѣмъ меньше ξ, тѣмъ больше скорость, ибо $\frac{dv}{dt} = n + \alpha \cos 2\xi$, слѣдовательно въ зависимости отъ варіаціи Луна движется тѣмъ быстрѣе, чѣмъ меньше уголъ ξ, а такъ какъ въ теченіе даннаго обращенія Солнце уйдетъ впередъ на 27°, то Луна, приближаясь къ концу мѣсяца, минуетъ тѣ точки своей орбиты, гдѣ скорость отъ варіаціи наибольшая. Итакъ въ общемъ скорость нѣсколько уменьшается.

Пусть

$$T_b = T_0 - \frac{2m^2 \, sin \, 2\xi}{n} = 27^d{,}321 + 0^d.04;$$

тогда

$$T = T_b - (2e_2 \, sin \, \varphi_2 - 2e_1 \, sin \, \varphi_1) + \ldots,$$

гдѣ φ_2 и φ_1, а также e_2 и e_1 соотвѣтственно среднія аномаліи и эксцентрицитеты для конца и начала мѣсяца.

Въ этой формулѣ приняты такимъ образомъ въ разсчетъ и варіація и эвекція, ибо послѣдняя, какъ извѣстно, всегда можетъ быть включена въ уравненіе центра при условіи измѣненій e и ω.

Отсюда мы заключаемъ, что амплитуда колебаній звѣздиаго мѣсяца зависитъ почти исключительно отъ движенія перигея. Въ самомъ дѣлѣ, еслибы перигей былъ неподвиженъ, то средняя аномалія для конца мѣсяца (φ_2) была-бы равна φ_1 и мѣсяцы, слѣдовательно, были-бы равны.

Постоянная прибавка къ долготѣ Луны, зависящая отъ варіаціи, какъ мы видѣли, равняется (съ нѣкоторымъ округленіемъ) $2m^2 \, sin \, 2\xi$. Если мы пожелаемъ представить варіацію съ помощью теоріи измѣненія произвольныхъ постоянныхъ, то можно положить:

$$2m^2 \, sin \, 2\xi = 6m^2 \, sin \, 2\xi - 4m^2 \, sin \, 2\xi$$

и отнести $6m^2 \, sin \, 2\xi$ къ измѣненіямъ e и ω, а $-4m^2 \, sin \, 2\xi$ приравнять $\Delta\varepsilon$.

При такихъ предположеніяхъ долгота Луны можетъ быть представлена въ эллиптическомъ видѣ:

$$v = nt + \varepsilon + 2e_1 \, sin \, \varphi_1,$$

гдѣ

$$\varepsilon = \varepsilon_0 - 4m^2 \, sin \, 2\xi.$$

31. Для вычисленія истинной долготы Луны и въ частности для опредѣленія продолжительности аномалистическихъ мѣсяцевъ требуется, какъ мы видѣли, возможно точное опредѣленіе варіацій $\Delta\omega$, Δe и $\Delta\varepsilon$.

Если остановиться на той степени приближенія, которая допускаетъ игнорированіе всѣхъ малыхъ неравенствъ, то формулы, выведенныя нами въ §§ 18 и 19, могли бы считаться довольно точными, въ особенности при рѣшеніи нашей главной задачи — вычисленія аномалистическихъ мѣсяцевъ, когда для начальнаго и конечнаго моментовъ времени средняя аномалія Луны, т. е. уголъ φ, отличается отъ 0 только на величину возмущеній, но вообще и независимо отъ условій рѣшенія упомянутой задачи вопросъ объ опредѣленіи варіацій Δe, $\Delta\omega$ и $\Delta\varepsilon$, по крайней мѣрѣ насколько они зависятъ отъ обоихъ главныхъ неравенствъ возмущеннаго луннаго движенія, требуетъ еще нѣкоторой обработки, и мы вернемся теперь къ нему.

Что касается до той части $\Delta\omega$, которая происходитъ отъ эвекціи, то, замѣчая, что $\Delta\omega_a$ совершенно не зависитъ отъ e, мы можемъ принять нашъ выводъ за окончательный, но величины варіацій Δe и $\Delta\varepsilon$, данныя въ § 18 требуютъ еще небольшихъ исправленій.

Мы допускали до сихъ поръ, при нашихъ выкладкахъ, что $\Delta\omega$ вообще незначительно, и что можно принять $\cos\Delta\omega = 1$, почему мы и брали

$$2e_1 \sin\varphi_1 = 2e_1 \sin(\varphi - \Delta\omega) = 2e_1 \sin\varphi - 2e \,.\, \cos\varphi \,.\, \Delta\omega$$

вмѣсто

$$2e_1 \sin\varphi \,.\, \cos\Delta\omega - 2e_1 \cos\varphi \,.\, \Delta\omega.$$

Между тѣмъ $\Delta\omega$ можетъ доходить, какъ мы видѣли, до 23 — 24°, и стало быть сумма $2e_1 \sin(\varphi_1 - \Delta\omega) + \Delta\varepsilon$ при данныхъ значеніяхъ Δe, $\Delta\omega$ и $\Delta\varepsilon$ не даетъ полной величины той прибавки къ средней долготѣ, которая должна замѣнить собою сразу — уравненіе центра, эвекцію и варіацію. Мы имѣемъ:

$$2e_1 \sin(\varphi_1 - \Delta\omega) + \Delta\varepsilon = 2e \sin\varphi + 2e \sin e \left(1 - \frac{(\Delta\omega)^2}{2}\right) + 2\Delta e \sin\varphi +$$

$$+ \ .\ .\ .\ + \Delta\varepsilon = 2c \sin\varphi + 2\Delta e \sin\varphi - 2e \cos\varphi \,.\, \Delta\omega +$$

$$+ \Delta\varepsilon - (\Delta\omega^2) \,.\, e_1 \sin\varphi = 2e \sin\varphi + \text{члены, зависящіе отъ эвекціи и}$$

$$\text{варіаціи} - (\Delta\omega)^2 \,.\, e_1 \sin\varphi \ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \quad (38)$$

Такъ какъ варіація вызываетъ измѣненія по крайней мѣрѣ въ 3-хъ элементахъ, то извѣстное допущеніе относительно $\Delta\omega_a$ и Δe_a, если оно и не оправдывается въ полной мѣрѣ разборомъ теоретическихъ формулъ, не влечетъ за собою ошибки въ окончательномъ результатѣ, ибо мы располагаемъ произвольно величиною $\Delta\varepsilon$.

Коэффиціентъ варіаціи по долготѣ содержитъ, какъ извѣстно, члены, зависящіе отъ $\int \frac{1}{r^2} \cdot dt \int \frac{dR}{dv} \cdot dt$, и потому величины $\Delta\omega_a$ и Δe_a не могутъ быть выражены формулами, въ которыхъ коэффиціенты при $\frac{\sin}{\cos}(2\xi - \varphi)$ и $\frac{\sin}{\cos}(2\xi + \varphi)$ опредѣляются рядами, составленными по одному закону.

Что̀ касается, однако, до найденныхъ нами *числовыхъ* величинъ $\Delta\omega$ и Δe, то онѣ даютъ возможность представить главныя неравенства долготы съ достаточнымъ приближеніемъ къ истинѣ (до порядка m^5).

Остается принять въ разсчетъ члены, зависящіе отъ тангенціальной силы. Для этого введемъ въ $\Delta\varepsilon$ *съ обратнымъ знакомъ* поправку, вычисленную нами въ § 8, какъ варіацію ω. Она равняется, какъ мы видѣли, $\frac{9}{16} m^2 \sin 2\xi$ и входитъ со знакомъ $+$ въ выраженія средней аномаліи $(nt + \varepsilon - \omega)$ и средней долготы $(nt + \varepsilon)$ *).

Итакъ:

$$\Delta e = 0{,}2 \cdot e \cdot \cos(2\xi - 2\varphi) + 0{,}344\, e \quad \cos(2\xi - \varphi) + 0{,}038\, e \cos(2\xi + \varphi)$$

и

$$\Delta\varepsilon\ ^{**)} = - 3 \frac{7}{16} m^2 \sin 2\xi = - 70' \cdot \sin 2\xi.$$

32. Для подтвержденія нашихъ выводовъ на числовомъ примѣрѣ, вычислимъ съ нѣсколько большими подробностями продолжительность звѣзднаго мѣсяца 18 марта — 14 апрѣля 1912 г., принимая въ основаніе данныя Англійскаго Морского Мѣсяцеслова и сравнивая ихъ съ выводами нашей теоріи.

Мѣсяцъ 18 марта — 14 апрѣля 1912 г. замѣчателенъ тѣмъ, что онъ почти равенъ среднему, такъ что на этомъ примѣрѣ можно видѣть, какъ при извѣстныхъ предположеніяхъ относительно измѣненій элементовъ e и ω всѣ неравенства, обусловливающія колебанія въ длинѣ звѣзднаго мѣсяца, взаимно компенсируются.

Замѣтимъ кстати, что средній звѣздный мѣсяцъ соотвѣтствуетъ тому начальному положенію линіи сизигій относительно линіи апсидъ, которое характеризуется формулой

$$\omega - ☾ = \pm 90^\circ.$$

Самый длинный мѣсяцъ, когда новолуніе совпадаетъ съ перигеемъ; самый короткій, когда новолуніе, въ которомъ начинается мѣсяцъ, приходится на точку апогея.

Среднее положеніе, когда линія апсидъ перпендикулярна къ линіи сизигій соотвѣтствуетъ среднему по продолжительности мѣсяцу. Долгота Луны въ $10^{ч}8^{м}.7$ марта 18-го 1912 г., въ моментъ новолунія, равнялась $357^\circ 58'.34$.

Будемъ считать за данныя—среднія долготы Луны и перигея въ моментъ новолунія.

Чтобы найти истинную долготу Луны, необходимо знать аномалію и уголъ ξ.

Приблизительная величина φ немедленно можетъ быть получена изъ равенства

$$\varphi = (nt + \varepsilon) - \omega_m$$

или

$$v_m - \omega_m,$$

а зная ее, мы тотчасъ же получаемъ $\Delta\varepsilon - \Delta\omega$, т. е. величину *возму-*

---

*) См. § 22 Т. Дв. Л.

**) § 31.

щеній средней аномаліи, а вслѣдъ за симъ болѣе точную величину φ, по формулѣ:

$$\varphi = (nt + \varepsilon) + \Delta\varepsilon - \omega_m - \Delta\omega.$$

Для момента новолунія (18 марта 10ʺ8‴.7)

$$\left.\begin{aligned} v_m &= 2^\circ.74 \\ \omega_m &= 111^\circ.24 \end{aligned}\right\} \text{(1-я стр. N. A.)}$$

$$\odot = 357^\circ 58'.5.$$

Отсюда

$$\varphi = v_m - \omega_m = -108^\circ.5, \quad \xi = v_m - \odot = 4^\circ.76$$

и

$$2\xi = 9^\circ.52.$$

Зная приблизительныя величины φ и 2ξ, вычисляемъ мулѣ § 19.

Мы имѣемъ для даннаго случая:

$$\Delta\omega = +11^\circ.44\, sin\, 46'.5 - 19^\circ.72\, sin\, 63^\circ - 2^\circ.19\, sin\, 81^\circ - 1^\circ . sin\, 9^\circ.5 =$$
$$= 8^\circ.3 - 17'.6 - 2^\circ.16 - 0^\circ.16 = -11^\circ.6,$$

и, слѣд., болѣе точная величина средней аномаліи

$$\varphi = -108^\circ.5 + 11^\circ.6 = 263^\circ.1.$$

Это и есть *возмущенная средняя аномалія.*

Подобнымъ же образомъ вычисляемъ Δe и $\Delta\varepsilon$.

Формулы § 31 даютъ:

1)

$$\Delta e = 0{,}2\, e \,.\, cos\,(2\xi - 2\varphi) + 0{,}344\, e\, cos\,(2\xi - \varphi) + 0{,}038\, e\, cos\,($$ [illegible]

2) $2\Delta e$ въ частяхъ радіуса:

$$-0{,}145 \,.\, 2e - 0{,}103\; 2e = -0{,}248 \,.\, 2e;$$

3) $\Delta\varepsilon = -70' \,.\, sin\, 2\xi = -11'.5$

и 4) $-(\Delta\omega)^2 \,.\, e\, sin\, \varphi = -0{,}025 \,.\, 2e \,.\, sin\, \varphi$

Отдѣляя эвекцію отъ варіаціи, представимъ $2e_1\, sin\, \varphi_1$ въ такомъ видѣ

$$\begin{aligned} 2e_1\, sin\, \varphi_1 &= (2e + x + y) \,.\, sin\,(\varphi_0 - (z + u)) \\ &= 2e\, sin\, \varphi_0 - 2e_1\,(z + u)\, cos\, \varphi + (x + y)\, sin\, \varphi - (z + u)^2 . e\, sin\, \varphi \\ &= 2e\, sin\, \varphi_0 - 2e_1\,\{8^\circ.3 - 10^\circ.9\} \,.\, \frac{2\pi}{360^\circ} \,.\, cos\, \varphi_0 - \{0{,}145 + \\ &\qquad + 0{,}103 + 0{,}025\}\, 2e\, sin\, \varphi_0 \\ &= 2e\, sin\, \varphi_0 + 2e \,.\, 0{,}202 \,.\, cos\, \varphi_0 - 2e \,.\, 0{,}273 \,.\, sin\, \varphi_0. \end{aligned}$$

Подстановка даетъ.

$$2e_1 \, sin \, \varphi_1 = - 2e \, . \, 0{,}727 \, . \, sin \, 83^\circ 1 = - 271'.4$$

и

$$2e_1 \, sin \, \varphi_1 + \Delta\varepsilon = - 271'.4 - 11'.5 = - 282'.9 \; . \; . \; . \; (39)$$

Обратимся теперь къ формулѣ:

$$v = nt + \varepsilon + 377'.3 \, sin \, \varphi + 13' \, . \, sin \, 2\varphi + 76'.3 \, sin \, (2\xi - \varphi) +$$
$$+ 3' \, . \, sin \, (2\xi + \varphi) + 39'.5 \, . \, sin \, 2\xi - 13' \, . \, sin \, \varphi'$$

и подставимъ въ нее вмѣсто φ ... 251°.5, вмѣсто 2ξ ... 9°.52 и вмѣсто φ' ... 75°.33 (средняя аномалія Солнца 18-го марта въ $10^ч 8^м.7$).

Вычисленіе даетъ:

$$= nt + \varepsilon - 357'.8 + 8' + 68'.1 - 3' + 6'.5 - 12'.6 =$$
$$= nt + \varepsilon - 290'.8.$$

Въ частности:

Уравненіе центра = — 357'.8, эвекція = + 68'.1, варіація + 6'.5, т. е. $2e \, sin \, \varphi$ + эв. + вар. = — 283'.2.

Ур. (39) даетъ

$$2e_1 \, sin \, \varphi_1 + \Delta\varepsilon = - 282'.9 = - 4^\circ 42'.9.$$

Согласіе, какъ видимъ, вполнѣ удовлетворительное.

Мы находимъ изъ N. A. для момента новолунія:

$$v_m = nt + \varepsilon = 2^\circ 47.4 \quad и \quad v = 357^\circ 58'.5.$$

Вычисленіе даетъ:

$$v = nt + \varepsilon - 290'.8 = 2^\circ 47'.4 - 4^\circ 50'.8 = - 2^\circ 3'.4$$
$$357^\circ 56'.6$$

357°58'.5, что̀ получается изъ таблицъ.

Подобнымъ же образомъ опредѣлимъ v для $18^ч 25^м$ 14 апрѣля 1912 г. Въ этотъ моментъ истинная долгота Луны равняется также 357°58'.5.

Разсматриваемый звѣздный мѣсяцъ заключаетъ $27^д 8^ч 16^м.3$.

33. Изъ непосредственныхъ наблюденій и изъ разбора теоретическихъ формулъ слѣдуетъ, что продолжительность звѣзднаго мѣсяца зависитъ прежде всего отъ относительнаго положенія линіи апсидъ и линіи соединеній. Самый короткій звѣздный мѣсяцъ — это тотъ, который начинается съ апогея, а самый долгій—наступленіе котораго отмѣчено совпаденіемъ новолунія съ перигеемъ. По мѣрѣ перемѣщенія линіи апсидъ, начиная отъ совпаденія новолунія съ апогеемъ, и продолжительность мѣсяца увеличивается.

Пусть μ число синодическихъ мѣсяцевъ въ промежуткѣ времени отъ одного совпаденія новолунія съ точкой апогея до другого, при дополнительномъ условіи возвращенія не только Луны, но и Солнца къ тѣмъ же аномаліямъ, которыя были въ началѣ мѣсяца, т. е. при условіи календарнаго тождества начала и конца періода.

Той же величинѣ μ равняется и число звѣздныхъ мѣсяцевъ въ этомъ періодѣ, считаемыхъ, какъ обыкновенно отъ новолунія, т. е. съ промежуткомъ отъ конца одного звѣзднаго обращенія до начала другого. Въ среднемъ продолжительность этого промежутка равняется $(\Sigma_0 - T_0)$ дней.

Если считать звѣздные мѣсяцы послѣдовательно одинъ за другимъ, безъ промежутковъ, то число полныхъ звѣздныхъ оборотовъ въ теченіе $\mu\Sigma_0$ дней будетъ $\frac{\mu\Sigma_0}{T_0}$.

Очевидно, общій періодъ синодическихъ и звѣздныхъ мѣсяцевъ возможенъ только при условіи, что μ = отношенію двухъ цѣлыхъ чиселъ.

Мы имѣемъ

$$\frac{\Sigma_0}{T_0} = \frac{29{,}5306}{27{,}3217} = 1.0808,$$

а это число весьма близко по отношенію $\frac{468}{433}$.

Въ самомъ дѣлѣ 468 звѣздныхъ мѣсяцевъ составляютъ 12787 среднихъ солнечныхъ сутокъ, а 433 синодическихъ — 12786,5 сутокъ; разница не больше 12 часовъ.

Дѣля 12786,5 на 365.25, находимъ 35.01; это значитъ, что въ 12786,5 дняхъ заключается почти ровно 35 Юліанскихъ годовъ.

Итакъ *циклъ въ 35 лѣтъ содержитъ 468 звѣздныхъ и 433 синодическихъ мѣсяца.*

Въ томъ же періодѣ времени приблизительно 464 аномалистическихъ и 470 драконическихъ мѣсяцевъ.

Если въ извѣстный моментъ Луна находилась напримѣръ въ апогеѣ и въ соединеніи съ Солнцемъ, то слѣдующее совпаденіе апогея и новолунія произойдетъ *приблизительно въ то же число мѣсяца* черезъ 35 лѣтъ.

Изъ сравненія скоростей Солнца и перигея слѣдуетъ, что совпаденія линіи апсидъ съ линіей соединеній совершаются вообще черезъ 205,9 дней, но уже съ значительной разницей во времени года.

Какъ извѣстно, данное совпаденіе перигея съ Солнцемъ отдѣляется отъ слѣдующаго промежуткомъ времени приблизительно въ 411 дней, т. е. 1 годъ плюсъ 45—46 дней.

Этотъ промежутокъ времени можно бы назвать малымъ синодическимъ цикломъ. Если пренебречь разностями, зависящими отъ φ', т. е. отъ мѣста Земли на ея орбитѣ, то можно принять для начала и конца этого періода $T_1 = T_2$ и $\Sigma_1 = \Sigma_2$.

Текущій 1912 годъ является первымъ въ 35-ти-лѣтнемъ циклѣ, начинающемся совпаденіемъ луннаго апогея съ январскимъ новолуніемъ. Синодическій мѣсяцъ 18 января—17 февраля начался почти отъ апогея, который Луна проходила 17-го января въ $13^ч.9$, почти за 34 часа до момента соединенія Луны съ Солнцемъ.

За 35 лѣтъ передъ этимъ, т. е. въ 1877 году промежутокъ времени между новолуніемъ и прохожденіемъ Луны черезъ апогей былъ нѣсколько короче: онъ не превосходилъ 13 часовъ.

Вотъ данныя изъ Nautical Almanac'овъ.

Новолуніе.				Апогей.	☾ въ моментъ новолунія.	Синодич. мѣсяцы.
1877	годъ	14 января	$1^ч27^м$	14 января $14^ч$.	294°33′.56	$29^д19^ч32^м$
1912	»	18 »	$23^ч10^м$	17 » $13^ч.9$	298° 2′.45	$29^д18^ч34^м$

Итакъ въ началѣ и концѣ цикла 14 января 1877 г.—18 января 1912 г. Луна находилась почти въ одинаковомъ положеніи относительно Солнца и солнечнаго перигелія, *въ той же точкѣ своей орбиты и въ томъ же разстояніи отъ точки весенняго равноденствія.*

Если взять за исходную точку совпаденіе новолунія съ перигеемъ, то согласіе теоретическаго вывода съ наблюденіями окажется еще тѣснѣе.

Изъ Nautical Almanac'овъ находимъ:

Новолуніе.				Перигей.	☾ въ мом. новолунія.	Синодич. мѣсяцы.
1877	годъ	10 іюля	$10^ч\ 6^м$	11 іюля $14^ч$	108°39′50″	$29^д7^ч11^м$
1913	»	14 »	$1^ч13^м.2$	14 » $12^ч$	111°41′11″	$29^д6^ч44^м$

34. Изъ разбора данныхъ за указанный періодъ времени можно вывести слѣдующія заключенія:

1) Начиная съ короткаго звѣзднаго мѣсяца 14 января—10 февраля 1877 г., продолжавшагося $27^д6^ч8^м.1$, и соотвѣтствовавшаго самому долгому синодическому мѣсяцу ($29^д19^ч32^м$), звѣздные мѣсяцы начинають увеличиваться до іюля—августа, затѣмъ опять убываютъ и т. д. Амплитуда ихъ колебаній наибольшая въ тѣ годы, которые начинаются совпаденіемъ линіи соединеній съ линіей сизигій (періодъ $4^ч.42$).

2) Въ ряду синодическихъ мѣсяцевъ самые продолжительные—это тѣ, которыми начинается и кончается данный 35-ти-лѣтній періодъ, если за исходную точку принять совпаденіе новолунія съ апогеемъ. Въ разсматриваемомъ циклѣ это зимніе мѣсяцы, которые, какъ извѣстно, вообще длиннѣе лѣтнихъ.

Амплитуда колебаній синодическихъ мѣсяцевъ въ началѣ и въ концѣ періода наибольшая. Разница между самымъ длиннымъ (зимнимъ) мѣсяцемъ и самымъ короткимъ (лѣтнимъ) доходитъ въ 1912 г. до $12^ч46^м$ (декабрь 1911 г.—январь 1912 г. $29^d19^ч30^м$, іюль—августъ 1912 г. $29^d6^ч44^м$).

3) Черезъ 4—5 лѣтъ послѣ начала періода (напримѣръ въ 1881 г.) разница между самымъ продолжительнымъ и самымъ короткимъ синодическими мѣсяцами убываетъ до $4^ч$. Самымъ длиннымъ мѣсяцемъ въ 1907 г. оказался періодъ 10 іюня—10 іюля, а самымъ короткимъ—синодическій мѣсяцъ 4 декабря 1907 г.—3 января 1908 г. Первый равнялся $29^d15^ч27^м.2$, а второй $29^d11^ч21^м$. Разница, какъ видимъ, не болѣе $4^ч5^м.2$.

4) Чтò касается до аномалистическихъ мѣсяцевъ, то наблюденія, какъ мы выше видѣли, даютъ:

$$A_{max} = 28^d13^ч.3 \text{ (дек. 1902 г.—янв. 1903 г.)}$$

$$= A_0 + \frac{1}{4}\left(2m - \frac{3}{2}\,m^2\right) \cdot A_0$$

$$A_{min} = 24^d16^ч \text{ (дек. 1904 г.)} = A_0 - \frac{3}{4}\left(2m - \frac{3}{2}\,m^2\right) A_0.$$

Отсюда получается замѣчательное соотношеніе между A_{max}, A_{min} и A_0:

$$A_{max} - A_{min} = 3^d.887 = \left(2m - \frac{3}{2}\,m^2 - \ldots\right) A_0 = 2\left(\frac{d\odot}{dt} - \frac{d\omega_n}{dt}\right) \cdot \frac{A_0}{n},$$

гдѣ производная $\frac{d\omega_n}{dt}$ означаетъ постоянную часть скорости перигея.

ПРИЛОЖЕНІЯ.

I.

Синоптическая таблица звѣздныхъ, синодическихъ и аномалистическихъ мѣсяцевъ за неріодъ премени съ января 1901 г. по декабрь 1912 г.

Звѣздные мѣсяцы.		Синодическіе мѣсяцы.		Аномалистическіе мѣсяцы.		Примѣчанія.
1901 годъ.						
20 янв.—16 февр.	$27^d10^h.04$	20/i—18/ii	$29^d12^h\ 9^m.4$	23/i—20/ii	$27^d15^h.2$	
18 февр.—18 марта	27 11 .23	18/ii—20/iii	29 10 7 .0	16/ii—20/iii	28 7 .4	
20 марта—16 апр.	27 10 .93	20/iii—18/iv	29 8 44 .4	20/iii—18/iv	28 10 .9	Перигей 20 марта 22^h.1.
18 апр.—15 мая	27 10 .69	18/iv—17/v	29 8 0 .2	18/iv—16/v	28 9 .8	Перигей 18 апр. 9^h.
17 мая—14 іюня	27 10 .00	17/v—16/vi	29 7 55 .3	16/v—13/vi	28 4 .4	
16 іюня—13 іюля	27 9 .34	16/vi—15/vii	29 8 37 .6	13/vi—11/vii	27 12 .6	
15 іюля—11 авг.	27 8 .10	15/vii—13/viii	29 10 17 .0	11/vii—5/viii	25 8 .4	
13 авг.—10 сент.	27 7 .05	13/viii—12/ix	29 12 51 .0	5/viii—1/ix	26 11 .3	
12 сент.—9 окт.	27 6 .60	12/ix—12/x	29 15 52 .8	1/ix—29/ix	27 22 .5	
12 окт.—8 нбр.	27 6 .00	12/x—10/xi	29 18 22 .9	29/ix—27/x	28 9 .2	
10 нбр.—8 дек.	27 6 .42	10/xi—10/xii	29 19 18 .9	27/x—25/xi	28 12 .8	
10 дек.—6 янв.	27 6 .84	10/xii—9/i	29 18 21 .5	25/xi—23/xii	28 11 .3	
1902 годъ.		1902 г.				
9 янв.—5 февр.	27 7 .83	9/i—8/ii	29 16 6 .9	23/xii—20/i	28 2 .8	
8 февр.—7 марта	27 8 .9	8/ii—9/iii	29 13 28 .7	20/i—16/ii	26 12 .0	
9 марта—6 апр.	27 9 .95	9/iii—8/iv	29 10 59 .9	16/ii—13/iii	25 2 .5	
8 апр.—5 мая	27 10 .56	8/iv—7/v	29 8 55 .1	13/iii—10/iv	27 16 .4	

Звѣздные мѣсяцы.		Синодическіе мѣсяцы.		Аномалистическіе мѣсяцы.		Примѣчанія.
1902 годъ.						
7 мая—3 іюня	27^{d}10^h.73	7/v—5/vi	29^d 6^{h}25^m.7	10/iv—8/v	28^d 6^h.4	
5 іюня—3 іюля	27 10 .47	5/vi—5/vii	29 6 48 .3	8/v—5/vi	28 9 .8	Перигей 5 іюня 17^h.2.
5 іюля—1 авг.	27 9 .87	5/vii—3/viii	29 7 18 .0	5/vi—4/vii	28 9 .0	
3 авг.—30 авг.	27 9 .04	3/viii—1/ix	29 9 2 .2	4/vii—1/viii	28 4 .1	
1 сент.—29 сент.	27 8 .04	1/ix—1/x	29 11 49 .7	1/viii—28/viii	27 13 .2	Апогей 9 сент. 22^h.6.
1 окт.—28 окт.	27 7 .14	1/x—30/x	29 15 4 .5	28/viii—23/ix	25 5 .3	
30 окт.—27 ноября.	27 6 .40	30/x—29/xi	29 17 50 .8	23/ix—19/x	26 13 .1	
29 нбр.—26 дек.	27 6 .03	29/xi—29/xii	29 19 20 .4	19/x—16/xi	28 0 .8	
29 Дек.—25 янв.	27 6 .19	29/xii—28/i	29 19 13 .8	16/xi—15/xii	28 10 .9	Апогей 29 дек. 6^h.7.
1903 годъ.		1903 г.				
28 янв.—24 февр.	27 7 .12	28/i—26/ii	29 17 41 .0	15/xii—12/i	28 13 .3	
26 февр.—26 марта	27 7 .83	26/ii—28/iii	29 15 6 .5	12/i—10/ii	28 10 .4	
28 марта—24 апр.	27 8 .88	28/iii—27/iv	29 12 5 .3	10/ii—10/iii	27 23 .6	
27 апр.—24 мая	27 9 .75	27/iv—26/v	29 9 18 .4	10/iii—5/iv	26 5 .9	
26 мая—22 іюня	27 10 .31	26/v—24/vi	29 7 21 .1	5/iv—30/iv	25 10 .2	Перигей 28 мая 9^h.4.
24 іюня—22 іюля	27 10 .59	24/vi—24/vii	29 6 35 .2	30/iv—28/v	27 16 .4	Перигей 25 іюня 14^h.6.
24 іюля—20 авг.	27 10 .53	24/vii—22/viii	29 7 4 .8	28/v—25/vi	28 5 .2	Перигей 23 іюля 23^h.7,
22 авг.—18 сент.	27 10 .20	22/viii—20/ix	29 8 39 .9	25/vi—23/vii	28 9 .1	Перигей 21 авг. 8^h.9.
20 сент.—18 окт.	27 9 .25	20/ix—20/x	29 10 59 .5	23/vii—21/viii	28 9 .2	

Звѣздные мѣсяцы.		Синодическіе мѣсяцы.		Аномалистическіе мѣсяцы.		Примѣчанія.
1903 годъ.						
20 окт.—16 ноября.	$27^d\ 8^h.17$	20/x—18/xi	$29^d 13^h 39^m.7$	21/viii—18/ix	$28^d\ 5^h.4$	
18 нбр.—16 дек.	27 7 .16	18/xi—18/xii	29 16 15 .9	18/ix—16/x	27 13 .4	
18 дек.—14 янв.	27 7 .12	18/xii—17/i	29 18 20 .7	16/x—10/xi	24 22 .1	
1904 годъ.		1904 г.				
17 янв.—13 февр.	27 6 .02	17/i—15/ii	29 19 18 .1	10/xi—6/xii	26 19 1	
15 февр.—14 марта	27 6 .25	15/ii—16/iii	29 18 34 .5	6/xii--4/i	28 3 .6	Апогей 15 февр. $12^h.4$.
16 марта—13 апр.	27 6 .87	16/iii—15/iv	29 16 14 .0	4/i—1/ii	28 11 .6	Перигей 1 февр. $12^h.1$ Полнолуніе 1 февр. $4^h 33^m.2$.
15 апр.—12 мая	27 7 .71	15/iv—14/v	29 13 5 .2	1/ii—1/iii	28 12 .8	
14 мая—11 іюня	27 8 .64	14/v—13/vi	29 10 12 .1	1/iii—29/iii	28 8 .8	Полнолуніе 1 мар. $14^h 48^m.4$ Перигей 1 мар. $0^h.9$.
13 іюня—10 іюля	27 9 .58	13/vi—12/vii	29 8 16 .8	29/iii—26/iv	27 20 .9	
12 іюля—9 авг.	27 10 .22	12/vii—11/viii	29 7 30 .8	26/iv—22/v	26 3 .9	
11 авг.—7 сент.	27 10 .82	11/viii—9/ix	29 7 44 .7	22/v—17/vi	25 14 .0	Перигей 11 авг. $21^h.3$.
9 сент.—6 окт.	27 10 .82	9/ix—8/x	29 8 42 .1	17/vi—14/vii	27 15 .7	Перигей 9 сент. $7^h.2$.
8 скт.—5 ноября.	27 9 .93	8/x—7/xi	29 10 11 .8	14/vii—11/viii	28 5 .1	Перигей 7 окт. $18^h.1$.
7 нбр.—4 дек.	27 9 .29	7/xi—6/xii	29 12 9 .7	11/viii—9/ix	28 9 .9	
6 дек.—3 янв.	27 8 .36	6/xii—5/i	29 14 30 .9	9/ix—7/x	28 10 .9	Апогей 14 дек. $15^h.6$.
1905 годъ.		1905 г.				
5 янв.—1 февр.	27 6 .95	5/i—3/ii	29 16 48 .6	7/x—5/xi	28 6 .2	
3 февр.—3 марта	27 6 .33	3/ii—5/iii	29 18 13 .5	5/xi—2/xii	27 12 .0	

Звѣздные мѣсяцы.		Синодическіе мѣсяцы.		Аномалистическіе мѣсяцы.		**Примѣчанія.**
1905 годъ.						
5 марта—1 апр.	$27^d\ 6^h.00$	5/iii—4/iv	$29^d18^h\ 4^m.0$	2/xii—27/xii	$24^d16^h.4$	Перигей 20 мар. $22^h.8$ Полнол. 20 мар. $16^h55^m.6$.
4 апр.—1 мая	27 6 .19	4/iv—4/v	29 16 26 .4	27/xii—23/i	27 1 .8	
				1905 г.		
4 мая—31 мая	27 6 .76	4/v—2/vi	29 14 6 .8	23/i—20/ii	28 5 .1	
2 іюня—30 іюня	27 7 .61	2/vi—2/vii	29 11 53 .3	20/ii 20/iii	28 11 .2	
2 іюля—29 іюля	27 8 .66	2/vii—31/vii	29 10 12 .8	20/iii—18/iv	28 11 .3	Перигей 9 іюля 17^h.
31 іюля—28 авг.	27 9 .75	31/vii—30/viii	29 9 10 .7	18/iv—16/v	28 7 .3	
30 авг.—26 сент.	27 10 .62	30/viii—28/ix	29 8 46 .1	16/v—13/vi	27 19 .6	
28 сент.—25 окт.	27 11 .07	28/ix—27/x	29 8 58 .3	13/vi—9/vii	26 4 .0	
27 окт.—24 нбр.	27 11 .01	27/x—26/xi	29 9 49 .3	9/vii—4/viii	25 14 .8	Перигей 27 окт. $16^h.5$.
26 нбр.—23 дек.	27 10 .35	26/xi—25/xii	29 11 16 .5	4/viii—31/viii	27 15 .5	
25 дек.—22 янв.	27 9 .23	25/xii—24/i	29 13 5 .7	31/viii—29/ix	28 5 .9	
1906 годъ.		1906 г.				
24 янв.—20 февр.	27 7 .98	24/i—22/ii	29 14 47 .9	29/ix—27/x	28 11 .3	
22 февр.—22 марта	27 6 .84	22/ii—24/iii	29 15 54 .7	27/x—25/xi	28 11 .7	Апогей 1 февр. $1^h.1$.
24 марта—20 апр.	27 6 .14	24/iii—23/iv	29 16 14 .6	25/xi—23/xii	28 6 .0	
23 апр.—20 мая	27 5 .89	23/iv—22/v	29 15 54 .1	23/xii—19/i	27 8 .0	
				1906 г.		
22 мая—19 іюня	27 6 .13	22/v—21/vi	29 15 5 .0	19/i—13/ii	34 16 .0	Апогей 22 мая $3^h.1$.

Звѣздные мѣсяцы.		Синодическіе мѣсяцы.		Аномалистическіе мѣсяцы.		Примѣчанія.
1906 годъ.						
21 іюня—18 іюля	$27^d\ 6^h.75$	21/vi—21/vii	$29^d 13^h 53^m.5$	13/ii—12/iii	$27^d\ 6^h.4$	
21 іюля—17 авг.	27 7 .84	21/vii—19/viii	29 12 48 .4	12/iii—9/iv	28 4 .8	
19 авг.—15 сент.	27 8 .86	19/viii—18/ix	29 11 6 .0	9/iv—8/v	28 9 .7	
18 сент.—15 окт.	27 9 .97	18/ix—17/x	29 10 9 .2	8/v—5/vi	28 10 .1	
17 окт.—13 нояб.	27 10 .71	17/x—15/xi	29 9 53 .8	5/vi—3/vii	28 6 .1	
15 нбр.—13 дек.	27 11 .33	15/xi—15/xii	29 10 17 .8	3/vii—31/vii	27 19 .5	
15 дек.—11 янв.	27 11 .14	15/xii—13/i	29 11 2 .7	31/vii—26/viii	26 2 .7	Перигей 15 дек. $2^h.5$.
1907 годъ.		1907 г.				
13 янв.—10 февр.	27 10 .27	13/i—12/ii	29 11 45 .9	26/viii—21/ix	25 14 .8	
12 февр.—11 марта	27 9 .0	12/ii—13/iii	29 12 21 .9	21/ix—19/x	27 17 .5	
13 марта—10 апр.	27 7 .88	13/iii—12/iv	29 13 1 .0	19/x—16/xi	28 8 .0	Апогей 21 марта $9^h.6$.
12 апр.—9 мая	27 6 .88	12/iv—11/v	29 13 53 .5	16/xi—15/xii	28 12 .7	
11 мая—8 іюня	27 6 .42	11/v—10/vi	29 14 50 .6	15/xii—12/i	28 12 .0	
				1907 г.		
10 іюня—7 іюля	27 6 .0	10/vi—10/vii	29 15 27 .2	12/i—9/ii	28 4 .6	
10 іюля—6 авг.	27 6 .2	10/vii—8/viii	29 15 19 .3	9/ii—8/iii	27 1 .3	
8 авг.—5 сент.	27 6 .83	8/viii—7/ix	29 14 27 .6	8/iii—2/iv	24 20 .3	
7 сент.—4 окт.	27 7 .63	7/ix—6/x	29 13 16 .6	2/iv—30/iv	27 8 .9	
6 окт.—3 нбр.	27 9 .01	6/x—5/xi	29 12 18 .3	30/iv—28/v	28 3 .8	

Звѣздные мѣсяцы.		Синодическіе мѣсяцы.		Аномалистическіе мѣсяцы.		Примѣчанія.
1907 годъ.						
5 нбр.—2 дек.	$27^d\ 9^h.66$	5/xi—4/xii	$29^d 11^h 43^m.5$	28/v—25/vi	$28^d\ 9^h.0$	
4 дек.—1 янв.	27 11 .28	4/xii—3/i	29 11 21 .0	25/vi—24/vii	28 9 .7	
1908 годъ.		1908 г.				
3 янв.—30 янв.	27 11 .25	3/i—1/ii	29 10 53 .1	24/vii—21/viii	28 6 .8	Полнол. 18 янв. $1^h 36^m.9$ Апогей 18 янв. 14^h.
1 февр.—29 февр.	27 10 .95	1/ii—2/iii	29 10 20 .4	21/viii—18/ix	27 20 .8	Перигей 1 февр. $13^h.7$.
2 марта—29 марта	27 9 .91	2/iii—31/iii	29 10 5 .3	18/ix—14/x	25 22 .7	
31 марта—28 апр.	27 8 .69	31/iii—30/iv	29 10 30 .9	14/x—8/xi	25 15 .7	
30 апр.—27 мая	27 7 .54	30/iv—29/v	29 11 41 .4	8/xi—6/xii	27 20 .7	
29 мая—25 іюня	27 6 .65	29/v—28/vi	29 13 17 .0	6/xii—4/i	28 9 .9	Апогей 7 мая $17^h.9$.
				1908 г.		
28 іюня—25 іюля	27 6 .10	28/vi—27/vii	29 14 45 .3	4/i—1/ii	28 13 .1	
27 іюля—24 авг.	27 5 .93	27/vii—26/viii	29 15 42 .1	1/ii—1/iii	27 15 .7	
26 авг.—22 сент.	27 6 .18	26/viii—25/ix	29 16 0 .5	1/iii—29/iii	28 2 .4	
25 сент.—22 окт.	27 6 .92	25/ix—24/x	29 15 47 .2	29/iii—25/iv	26 21 .1	
24 окт.—21 нонбря	27 8 .05	24/x—23/xi	29 15 6 .5	25/iv—20/v	25 1 .1	
23 нбр.—20 дек.	27 9 .35	23/xi—23/xii	29 13 56 .6	20/v—16/vi	27 8 .5	
22 дек.—19 янв.	27 10 .5	22/xii—21/i	29 12 22 .1	16/vi—14/vii	28 2 .9	
1909 годъ.		1909 г.				
21 янв.—17 февр.	27 11 .14	21/i—19/ii	29 10 40 .3	14/vii—11/viii	28 8 .8	

Звѣздные мѣсяцы.		Синодическіе мѣсяцы.		Аномалистическіе мѣсяцы.		Примѣчанія.
1909 годъ.						
19 февр.—19 марта	$27^d 11^h.13$	19/ii—21/iii	$29^d\ 9^h 19^m.2$	11/viii—9/ix	$28^d 11^h.2$	Перигей 20 февр. $11^h.4$.
21 марта—17 апр.	27 10 .56	21/iii—19/iv	29 8 40 .1	9/xi—7/x	28 8 .1	Перигей 20 марта $23^h.4$.
19 апр.—17 мая	27 9 .66	19/iv—19/v	29 8 50 .7	7/x—4/xi	27 20 .8	
19 мая—15 іюня	27 8 .47	19/v—17/vi	29 9 46 .3	4/xi—30/xi	25 14 .5	
17 іюня—14 іюля	27 7 .54	17/vi—16/vii	29 11 16 .3	30/xi—26/xii	25 22 .2	Апогей 25 іюня $0^h.2$.
16 іюля—13 авг.	27 6 .66	16/vii—15/viii	29 13 10 .1	26/xii—23/i	27 23 .8	
				1909 г.		
15 авг.—11 сент.	27 6 .1	15/viii—14/ix	29 15 14 .0	23/i—20/ii	28 10 .2	Полнол. 30 авг. $17^h 7^m.8$ Перигей 31 авг. $19^h.3$.
14 сент.—11 окт.	27 5 .95	14/ix—13/x	29 17 4 .7	20/ii—20/iii	28 12 .0	Перигей 29 сент. 5^h Полнол. 29 сент $1^h 5^m.4$.
13 окт.—10 ноября.	27 6 .32	13/x—12/xi	29 18 4 .9	20/iii—18/iv	28 9 .0	
12 нбр.—9 дек.	27 7 .17	12/xi—12/xii	29 17 40 .4	18/iv—16/v	28 0 .1	
12 дек.—8 янв.	27 8 .27	12/xii—10/i	29 15 52 .5	16/v—12/vi	26 19 .8	
1910 годъ.		1910 г.				
10 янв.—7 февр.	27 9 .45	10/i—9/ii	29 13 21 .2	12/vi—7/vii	25 1 .7	
9 февр.—8 марта	27 10 .4	9/ii—11/iii	29 10 59 .4	7/vii—3/viii	27 8 .0	
11 марта—6 апр.	27 10 .9	11/iii—9/iv	29 9 12 .7	3/viii—31/viii	28 3 .3	Перигей 12 марта $11^h.2$.
9 авр.—6 мая	27 10 .87	9/iv—8/v	29 8 7 .8	31/viii—29/ix	28 10 .7	
8 мая—5 іюня	27 10 .4	8/v—7/vi	29 7 43 .5	29/ix—27/x	28 11 .7	
7 іюня—4 іюля	27 9 .56	7/vi—6/vii	29 8 3 .6	27/x—25/xi	28 8 .8	

Звѣздные мѣсяцы.		Синодическіе мѣсяцы.		Аномалистическіе мѣсяцы.		Примѣчанія.
1910 годъ.						
6 іюля—2 авг.	$27^d\ 8^h.6$	6/vii—4/viii	$29^d\ 9^h\ 16^m.8$	25/xi—22/xii	$27^d\ 19^h.3$	
4 авг.—1 сент.	27 7 .74	4/viii—3/ix	29 11 28 .9	22/xii—17/i	25 4 .7	
				1910 г.		
3 сент.—30 сент.	27 6 .78	3/ix—2/x	29 14 26 .3	17/i—12/ii	26 8 .5	
2 окт.—30 окт.	27 6 .48	2/x—1/xi	29 17 24 .1	12/ii—12/iii	28 1 .2	
1 нбр.—28 ноября.	27 5 .97	1/xi—1xii	29 19 14 .6	12/iii - 9/iv	28 9 .5	Апогей 3 нояб. $6^h.2$.
1 дек.—28 дек.	27 6 .4	1/xii—31/xii	29 19 10 .5	9/iv—8/v	28 10 .7	
31 дек.—27 янн.	27 7 .2	31/xii—29/i	29 17 23 .5	8/v—5/vi	28 7 .8	
1911 годъ.		1911 г.				
29 янв.—26 февр.	27 8 .36	29/i—28/ii	29 14 46 .4	5/vi—3/vii	27 23 .9	
28 фенр.—27 марта	27 9 .38	28/ii—30/iii	29 12 6 .7	3/vii—30/vii	26 19 .3	
30 марта—26 апр.	27 10 .4	30/iii—28/iv	29 9 47 .2	30/vii—24/viii	25 2 .8	
28 апр. 25 мая	27 10 .85	28/iv—27/v	29 7 59 .6	24/viii—20/ix	27 9 .2	Перигей 29 апр. $21^h.0$.
27 мая—24 іюня	27 10 .70	27/v—26/vi	29 6 55 .3	20/ix—19/x	28 4 .8	Перигей 28 мая $5^h.4$.
26 іюня—23 іюля	27 10 .3	26/vi—25/vii	29 6 52 .3	19/x—16/xi	28 11 .6	Перигей 25 іюня $15^h.1$.
25 іюля—21 авг.	27 9 .5	25/vii—23/viii	29 8 2 .3	16/xi—15/xii	28 12 .9	Перигей 23 іюля $22^h.6$.
23 авг.—20 сент.	27 8 .7	23/viii—22/ix	29 10 23 .1	15/xii—12/i	28 8 .6	
				1911 г.		
22 сент.—19 окт.	27 8 .0	22/ix—21/x	29 13 31 .9	12/i—9/ii	27 16 .6	

Звѣздные мѣсяцы.		Синодическіе мѣсяцы.		Аномалистическіе мѣсяцы.		Примѣчанія.
1911 годъ.						
21 окт.—17 ноября.	$27^d\ 6^h.94$	21/x—20/xi	$29^d 16^h 40^m.1$	9/ii—6/iii	$24^d 23^h.4$	
20 нбр.—17 дек.	27 6 .2	20/xi—20/xii	29 18 50 .9	6/iii—1/iv	26 15 .7	
20 дек.—16 янв.	27 6 .00	20/xii—18/i	29 19 29 .7	1/iv—29/iv	28 0 .8	
1912 годъ.		1912 г.				
18 янв.—15 февр.	27 6 .43	18/i—17/ii	29 18 34 .1	29/iv—28/v	28 8 .4	Апогей 17 янв. $13^h.9$.
17 февр.—16 марта	27 7 .27	17/ii—18/iii	29 16 24 .6	28/v—25/vi	28 9 .7	
18 марта—14 апр.	27 8 .27	18/iii—16/iv	29 13 31 .5	25/vi—23/vii	28 7 .5	
16 апр.—14 мая	27 9 .25	16/iv—16/v	29 10 33 .4	23/vii—20/viii	28 0 .0	
16 мая—12 іюня	27 9 .97	16/v—**14**/vi	29 8 10 .0	20/viii—16/ix	26 19 .4	
14 іюня—12 іюля	27 10 .47	14/vi—14/vii	29 6 49 .6	16/ix—11/x	25 0 .6	Перигей 16 іюня $4^h.5$.
14 іюля—10 авг.	27 10 .62	14/vii—12/viii	29 6 44 .4	11/x—8/xi	27 11 .6	Перигей 14 іюля $12^h.0$.
12 авг.—8 сент.	27 10 .62	12/viii—10/ix	29 7 50 .9	8/xi—6/xii	28 6 .8	Перигей 11 авг. $21^h.0$.
10 сент.—8 окт.	27 9 .77	10/ix—10/x	29 9 52 .1	6/xii—4/i	28 12 .7	Перигей 9 сент. $6^h.3$.
				1912 г.		Перигей 7 окт. $6^h.8$.
10 окт.—6 ноября.	27 8 .8	10/x—8/xi	29 12 24 .2	4/i—1/ii	28 12 .6	
8 нбр.—5 дек.	27 7 .9	8/xi—8/xii	29 15 1 .9	1/ii—29/ii	28 6 .7	
—	—	—	—	29/ii—28/iii	27 12 .0	
—	—	—	—	28/iii—22/iv	25 1 .3	
—	—	—	—	22/iv—19/v	26 18 .3	

Звѣздные мѣсяцы.		Синодическіе мѣсяцы.		Аномалистическіе мѣсяцы.		**Примѣчанія.**
1912 годъ.						
—	—	—	—	19/v—16/vi	$27^d 23^h .9$	
—	—	—	—	16/vi—14/vii	28 7 .5	
—	—	—	—	14/vii—11/viii	28 9 .6	
—	—	—	—	11/viii—9/ix	28 8 .7	
—	—	—	—	9/ix—7/x	28 0 .5	
—	—	—	—	7/x—2/xi	26 16 .1	
—	—	—	—	2/xi—27/xi	24 23 .8	
—	—	—	—	27/xi—25/xii	27 16 .1	

II.

Аномалистическое движенiе въ 1901 г.

Моментъ прохожденія через перигей или апогей.	Ист. долг. перигея $\omega = ☾^{+0}_{+180}$	Средняя долгота перигея ω_m	$\omega - \omega_m$	⊙	$\xi = ☾ - ⊙$	2ξ	$\Delta\tau$	Аномалист. мѣсяцы A.
11 янв. . . . . 23^h.0 (а.)	17°15′.6	16°.2	+ 1°.05	291°35′.1	+ 85°40′.5	171°21′.0	12^d 0^h.5	
23 » . . . . 23 .5 (п)	355 4 .2	17 .7	—22 .6	303 49 .5	—128 45 .3	102 29 .4	15 19 .9	27^{d}15^h.2
8 февр. . . . 19 .4 (а.)	23 57 .8	19 .3	+ 4 .6	319 52 .0	—115 54 .2	128 11 .6	11 19 .3	
20 » . . . 14 .7 (п).	359 22 .1	20 .7	—21 .4	331 48 .6	—152 26 .5	55 7 .0	15 21 .0	28 7 .4
8 марта . . . 11 .7 (а.)	27 47 .9	22 .45	+ 5 .35	347 43 .7	—139 55 .8	80 8 .4	12 10 .4	
20 » . . . 22 .1 (п.)	12 38 .7	23 .8	—11 .2	0 6 .5	+ 12 32 .2	25 4 .4	14 20 .4	28 10 .9
4 апр. . . . 18 .5 (а.)	27 58 .4	25 .6	+ 1 .35	14 47 .1	+193 11 .3	26 22 .6	13 14 .5	
18 » . . . 9 .0 (п.)	27 45 .3	27 .0	+ 0 .75	28 7 .1	— 0 22 .8	359 14 .4	13 11 .2	28 9 .8
1 мая . . . . 20 .2 (а.)	25 48 .8	28 .5	— 2 .7	41 12 .7	+164 36 .1	329 12 .2	14 22 .6	
16 » . . . . 18 .8 (п.)	42 15 .2	30 .2	+12 .05	55 39 .5	— 13 24 .3	333 11 .4	12 10 .4	28 4 .4
29 » . . . . 5 .2 (а.)	27 6 .2	31 .6	-- 4 .5	67 36 .3	+139 29 .9	278 59 .8	15 18 .0	
13 іюня . . . 23 .2 (п.)	53 53 .2	33 .4	+20 .5	82 37 .8	— 28 44 .6	302 30 .8	11 22 .0	27 12 .6
25 » . . . 21 .2 (а.)	31 27 .6	34 .7	— 3 .25	94 2 .5	+117 25 .1	234 50 .2	15 14 .6	
11 іюля . . . 11 .8 (п.)	56 48 .3	36 .4	+19 .4	108 55 .7	— 52 7 .4	255 45 .2	12 3 .5	25 8 .4
23 » . . . 15 .3 (а.)	48 21 .95	37 .8	+10 .6	120 30 .7	+107 51 .25	215 42 .5	13 4 .9	
5 авг. . . . . 20 .2 (п.)	30 3 .66	39 .2	— 9 .15	133 8 .6	—100 4 .9	159 50 .2	14 14 .0	26 11 .3
20 » . . . . 10 .2 (а.)	41 56 .4	40 .8	+ 1 .1	147 9 .5	+ 74 46 .9	149 33 .8	11 21 .3	
1 сент. . . . 7 .5 (п.)	18 39 .05	42 .0	—23 .35	158 42 .58	—140 3 .53	79 52 .94	15 21 .4	27 22 .5
17 » . . . 4 .9 (а.)	47 25 .0	44 .0	+ 3 .4	174 4 .8	+ 53 20 .2	106 40 .4	12 1 .1	
29 » . . . 6 .0 (п.)	27 1 .5	45 .3	—18 .3	185 52 .4	—158 50 .9	42 18 .2	15 13 .3	28 9 .2
14 » . . . 19 .3 (а.)	51 9 .1	46 .9	+ 4 .2	201 14 .3	+ 29 54 .8	59 49 .6	12 19 .9	
27 » . . . 15 .2 (п.)	41 10 .4	48 .4	— 7 .2	214 0 .5	—172 50 .1	14 19 .8	14 8 .8	28 12 .8
11 ноября . . 0 .0 (а.)	50 24 .5	50 .1	+ 0 .3	228 24 .7	+ 1 59 .8	3 59 .6	14 4 .0	
25 » . . 4 .0 (п.)	57 12 .7	51 .7	+ 5 .5	242 42 .4	—185 29 .7	349 0 .6	12 22 .0	28 11 .3
8 дек. . . . . 2 .0 (а.)	48 19 .9	53 .0	— 4 .7	255 47 .0	—272 7 .1	175 45 .8	15 13 .3	
23 » . . . . 15 .3 (п.)	72 45 .2	54 .8	+17 .55	271 37 .8	—198 52 .6	322 14 .8		

III.

Аномалистическое движеніе въ 1912 г.

Моментъ прохожденія черезъ перигей или апогей.	Ист. долг. перигея $\omega = ☾\,^{+0}_{+180}$	Средняя долгота перигея ω_m	$\omega - \omega_m$	☉	$\xi = ☾ - ☉$	2ξ	$\Delta\tau$	Аномалист. мѣсяцы *A*.
4 янв. . . . . 1^h.7 (п.)	102°59′.75	103°.0	0	282°51′.5	—179°51′.8	+ 0°16′.4	13^{d}12^h.2	28^{d}12^h.6
17 » . . . . . 13 .9 (а.)	101 34 .7	104 .4	— 2 .8	296 37 .6	—195 2 .9	+ 30 5 .8	15 0 .4	
1 февр. . . . 14 .3 (п.)	119 3 .6	107 .0	+123′.6	311 53 .5	—192 49 .9	— 25 39 .8	12 8 .7	28 6 .7
13 » . . . 23 .0 (а.)	102 53 .8	107 .5	—· 4 .6	324 25 .0	—221 31 .2	— 83 2 .4	15 22 .0	
29 » . . . 21 .0 (п.)	131 56 .8	109 .2	+22 .75	340 26 .2	—208 29 .4	— 56 53 .8	12 19 .7	27 12 .0
12 марта . . . 16 .7 (а.)	108 3 .2	110 .5	— 2 .5	352 15 .7	—214 12 .5	—128 25 .0	15 16 .3	
28 » . . . 9 .0 (п.)	134 27 .0	112 .3	+22 .15	7 49 .0	+126 38 .0	—106 44 .1	11 3 .8	25 1 .3
9 апр. . . . . 12 .8 (а.)	114 4 .05	113 .7	+ 0 .4	19 46 .0	+ 94 18 .0	—171 24 .0	12 22 .0	
22 » . . . . 10 .3 (п.)	103 28 .5	115 .1	—12 .7	32 24 .2	— 71 4 .3	—142 8 .6	14 21 .7	26 18 .3
7 мая . . . . 8 .0 (а.)	116 2 .6	116 .8	— 0 .75	46 52 .1	+ 69 10 .1	+138 20 .2	11 20 .6	
19 » . . . . 4 .6 (п.)	95 50 .4	118 .1	—22 .25	58 18 .2	+ 37 32 .2	+ 75 4 .4	15 20 .3	28 0 .2
4 іюня . . 0 .9 (а.)	124 15 .3	119 .8	+ 4 .5	73 30 .2	+ 50 45 .1	+101 30 .2	12 3 .9	
16 » . . . 9 .5 (п.)	108 15 .3	121 .2	—12 .9	85 18 .9	22 56 .4	+ 45 52 .8	15 8 .1	28 7 .5
1 іюля . . . 12 .6 (а.)	126 45 .3	122 .9	+ 4 .9	99 44 .6	+ 27 0 .7	+ 54 1 .4	12 23 .4	
14 » . . . 12 .0 (п.)	118 34 .05	123 .2	— 4 .6	112 7 .8	+ 6 27 .0	+ 12 54 .0	14 4 .8	28 9 .6
28 » . . 16 .8 (а.)	125 49 .6	125 .9	— 0 .1	125 40 .5	+ 9 .1	+ 0 18 .2	14 4 .8	
11 авг. . . . 21 .6 (п.)	133 5 .9	127 .5	+ 5 .6	139 16 .7	— 6 10 .8	— 12 21 .6	12 23 .0	28 8 .7
24 » . . . . 20 .6 (а.)	124 41 .7	129 .0	— 4 .3	151 45 .0	— 27 3 .3	— 54 6 .6	15 9 .7	
9 сент. . . . 6 .3 (п.)	147 9 .7	130 .7	+16 .4	166 40 .1	— 19 30 .4	— 39 0 .8	12 2 .0	28 0 .5
21 » . . . 8 .3 (а.)	127 8 .5	132 .1	— 5 .0	178 27 .4	— 51 18 .9	—102 37 .8	15 22 .5	
7 окт. . . . . 6 .8 (п.)	156 36 .6	133 .8	+22 .8	194 7 .0	— 37 30 .4	— 75 0 .8	11 19 .2	26 16 .1
19 » . . . . 2 .0 (а.)	132 7 .2	135 .1	— 3 .0	205 49 .0	— 73 41 .8	—147 23 .6	14 20 .9	
2 ноября . . 22 .9 (п.)	147 50 .6	136 .7	+11 .1	220 39 .6	— 72 49 .0	—145 38 .0	12 23 .6	24 23 .8
15 » . . 22 .5 (а.)	138 12 .25	138 .2	0	232 42 .6	— 94 30 .35	+170 59 .3	12 0 .2	
27 » . . 22 .7 (п.)	115 53 .3	139 .6	—23 .7	245 51 .3	—129 58 .0	+100 4 .0	15 20 .5	27 16 .1
13 дек. . . . 19 .2 (а.)	144 29 .2	141 .2	+ 3 .3	261 57 .3	—117 28 .1	+125 3 8	11 19 .6	
25 » . . . . . 14 .8 (п.)	120 40 .4	142 .6	—21 .9	273 59 .5	—153 19 .1	+ 53 21 .8		

IV.

Таблица драконическихъ мѣсяцевъ за 1901 г.

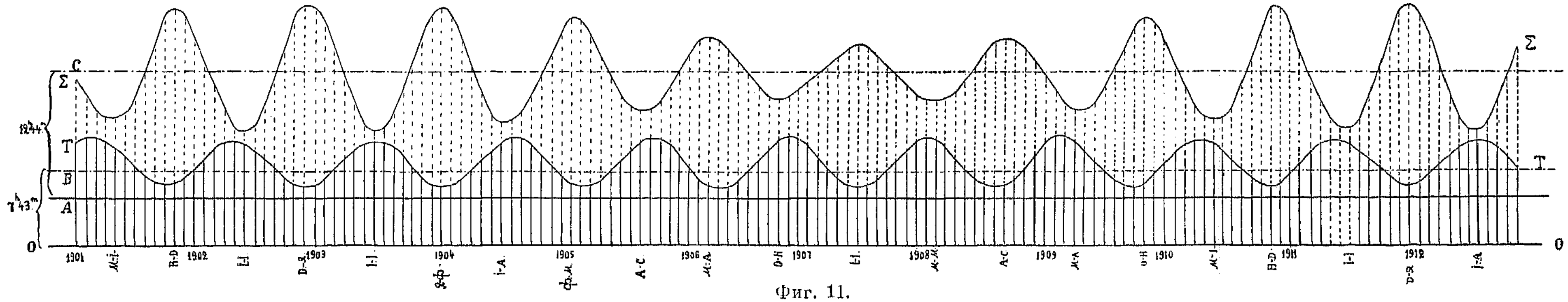
ДАТА.	$v = \text{☊}$	Δ	Примѣчанія.
15 января . . . . $13^ч.55$	$240^\circ 26'.16$	$27^д 3^ч.17$	$\text{☊} - \text{☊}_m = +1^\circ 26'$; $\odot - \text{☊} = 54^\circ 51'$; 15 января значительное передвиженіе узла впередъ; 11 февр. $\text{☊} - \text{☊}_m = 0$, при $\odot - \text{☊} = 85^\circ 10'$.
11 фенраля . . . . 16 .72	237 37 .5	27 1 .50	
10 марта . . . . 18 .22	234 37 .9	27 2 .88	
6 апрѣля . . . . 21 .10	232 52 .6	27 5 .30	
4 мая . . . . 2 .40	232 32 .1	27 6 .49	
31 » . . . . 8 .89	232 36 .3	27 5 .77	
27 іюня . . . . 14 .66	231 55 .86	27 3 .72	$\text{☊} - \text{☊}_m = +1^\circ 32'$; узелъ впереди средняго мѣста; $\odot - \text{☊} = -136^\circ 13'$.
24 іюля . . . . 18 .38	229 53 .76	27 2 .15	
20 августа . . . . 20 .53	227 1 .23	27 2 .61	$\text{☊} - \text{☊}_m = +0^\circ.1$ при $\odot - \text{☊} = -79^\circ 24'$.
16 сентября . . . . 23 .14	224 36 .1	27 4 .73	$\text{☊} - \text{☊}_m = -1^\circ 24'$; значительное отступленіе узла. Мѣсяцъ короче средняго; $\text{☊} - \odot$ 16 сент. $= 50^\circ 46'$.
14 октября . . . . 3 .87	223 34 .7	27 6 .14	
10 ноября . . . . 10 .01	223 35 .75	27 5 .92	$\text{☊} - \text{☊}_m = +0^\circ.4$ при $\odot - \text{☊} = 4^\circ 14'$.
7 декабря . . . . 15 .93	223 23 .57		

V.

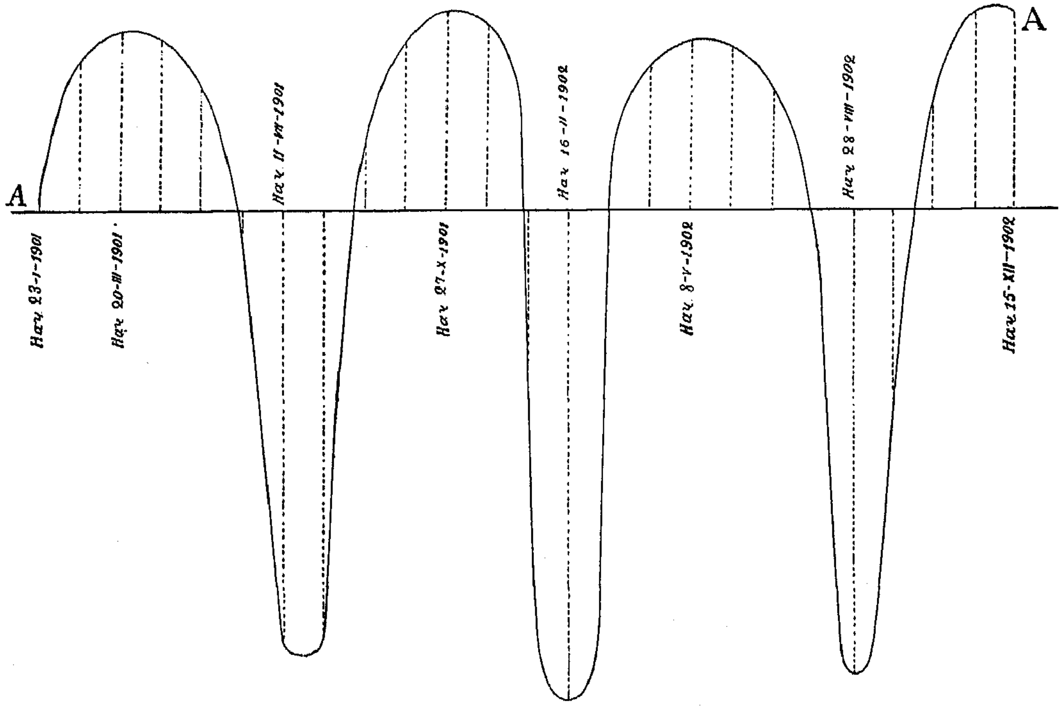
Таблица драконическихъ мѣсяцевъ за 1912 г.

Д А Т А.	$v =$ ☊	Δ	⊙	⊙ − ☊	2⊙ − 2☊	☊$_m$	☊ − ☊$_m$	Примѣчанія.
26 янв. . . 0^ч.8	25°.05		305°.2	280°.2	200°.4	25°.76	−0°.71	
		27^{д}8^ч.83						
22 февр. . 1 .62	22 .5		332 .6	310 .1	260 .2	24 .33	−1 .83	Узелъ позади ср. мѣста; 2⊙ − 2☊ близко къ 270°.
		27 4 .25						
20 марта . 5 .89	21 .55		359 .8	338 .3	316 .6	22 .9	−1 .35	
		27 7 .87						
16 апр. . . 13 .76	21 .6		26 .6	5 .0	10 .0	21 .47	+0 .1	☊ почти совпадаетъ съ ⊙.
		27 8 .78						
13 мая . . 22 .54	21 .3		53 .2	31 .9	63 .8	20 .04	+1 .26	
		27 6 .68						
10 іюня . 5 .22	19 .8		79 .4	59 .6	119 .2	18 .56	+1 .24	
		27 3 .21						
7 іюля . . 8 .43	17 .1		105 .3	88 .2	176 .4	17 .13	−0 .03	⊙ − ☊ = 88°.2.
		27 1 .27						
3 авг. . . 9 .70	14 .3		131 .1	116 .8	233 .6	15 .70	−1 .4	
		27 2 .48						
30 » . . 12 .18	12 .7		157 .2	144 .5	289 .0	14 .27	−1 .57	
		27 5 .46						
26 сент. . 17 .64	12 .4		183 .7	171 .3	342 .6	12 .84	−0 .44	Почти противостояніе ☊ и ⊙.
		27 7 .70						
24 окт. . . 1 .34	12 .4		210 .75	198 .4	36 .8	11 .36	+1 .04	
		27 7 .31						
20 ноября . 8 .65	11 .6		238 .2	226 .6	93 .2	9 .93	+1 .67	Узелъ впереди средняго мѣста при ⊙ − ☊ = 180° + 46°.4.
		27 4 .31						
11 дек. . . 12 .96	9 .1		265 .7	256 .6	153 .2	8 .50	+0 .6	

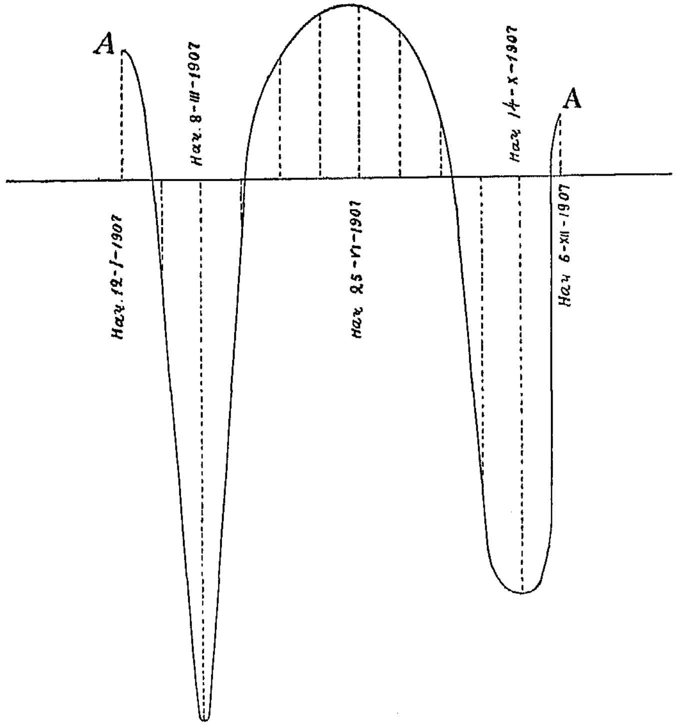
ГРАФИКИ.



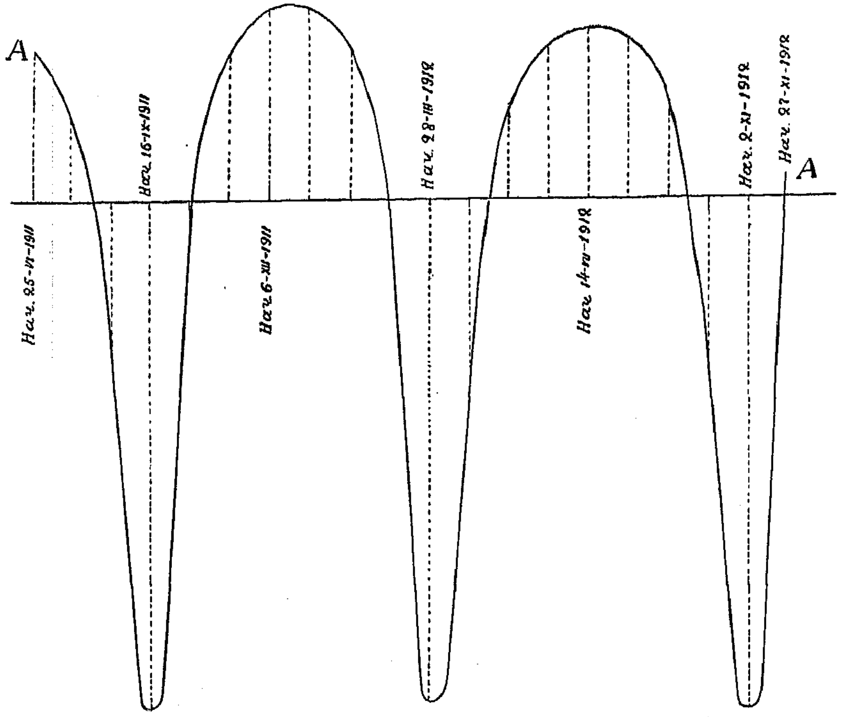
Фиг. 11.



Фиг. 12.



Фиг. 13.



Фиг. 14.

На чертежѣ (11) изображены графически послѣдовательные звѣздные и синодическіе мѣсяцы за періодъ времени съ 20 Января 1901 г. по 8 Декабря 1912 г.

Ординаты кривой T, считаемыя отъ линіи OO представляютъ $T-27^{д}$, т. е. число часовъ сверхъ $27^{д}$ въ каждомъ данномъ звѣздномъ мѣсяцѣ; пунктирная линія B соотвѣтстауетъ $7^{ч}\,43^{м}$, т. е. $T_0-27^{д}$ (Средній звѣздный мѣсяцъ$=$ $=27^{д}\ 7^{ч}\ 43^{м}$) Напримѣръ ордината, соотвѣтствующая $Д-Я$. 1902 г. даетъ $27^{д}\,6^{ч}.\,19$, т. е. менѣе средняго звѣзднаго мѣсяца на $1^{ч}\,52^{м}$.

Ордината, соотвѣтствующая $I-A$. 1904 г. даетъ $27^{д}\,10^{ч}.\,22$, т. е. болѣе средняго на $2^{ч}\,30^{м}$.

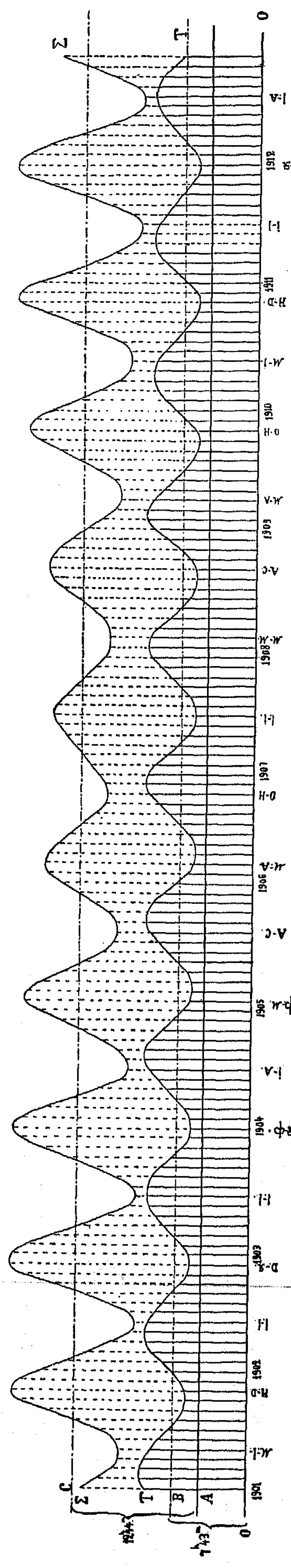
Кривая Σ показываетъ измѣненія продолжительности синодическихъ мѣсяцевъ за тотъ же періодъ времени; ординаты $A\Sigma$ даютъ число часовъ сверхъ $29^{д}$; пунктирная линія $C\Sigma$ отстоитъ отъ A на $12^{ч}\,44^{м}$ или на $\Sigma_0-29^{д}$, (Средній синодическій равняется $29^{д}\,12^{ч}\,44^{м}$) такъ что кривая $\Sigma\Sigma$ показываетъ, на сколько часовъ данный синодическій мѣсяцъ болѣе или менѣе средняго.

Напримѣръ, ордината, соотвѣтствующая $I.-I.$ 1902 г. даетъ $29^{д}\ 6^{ч}\ 48^{м}$, т. е. менѣе средняго синодическаго мѣсяца на $5^{ч}\ 56^{м}$.

Ордината, соотвѣтствующая $Д.-Я.$ 1911 г. даетъ $29^{д}\ 19^{ч}\ 29^{м}.\ 7$, т. е. болѣе средняго синодическаго мѣсяца на $6^{ч}\ 45^{м}.\ 7$.

На прилагаемомъ чертежѣ (12), показывающемъ измѣненія аномалистическихъ мѣсяцевъ за періодъ времени съ 23 января 1901 г. по 12 января 1903 г. ординаты кривой AA представляютъ разности $\pm(A-A_0)$ въ доляхъ сутокъ или промежутки времени (въ среднихъ солнечныхъ суткахъ), на величину которыхъ данный аномалистическій мѣсяцъ больше или меньше средняго аномалистическаго же мѣсяца, продолжительность котораго, какъ извѣстно, $27^{д}.555$. Линія абсциссъ соотвѣтствуетъ именно среднему аномалистическому мѣсяцу. Напримѣръ, аномалистическій мѣсяцъ, начавшійся 15 декабря 1902 г., продолжался $28^{д}.554$, т. е. былъ больше средняго на $0^{д}.999$ и почти равнялся возможному maximum'у; аномалистическій мѣсяцъ, начавшійся 13 іюня 1901 г. продолжался $27^{д}.52$, т. е. былъ почти равенъ среднему, и аномалистическій мѣсяцъ, начавшійся 16 февраля 1902 г., продолжался $25^{д}.10$, т. е. былъ менѣе средняго на $2^{д}.45$. На чертежѣ (13) кривая AA даетъ разности $\pm(A-A_0)$ въ доляхъ среднихъ солнечныхъ сутокъ за періодъ времени съ 12 января 1907 г. по 4 января 1908 г. Чертежъ (14) даетъ величины аномалистическихъ мѣсяцевъ за періодъ времени съ 25 іюня 1911 г. по 25 декабря 1912 г.

КОНЕЦЪ.



Фиг. 11.